

NAZIONALE
B. Prov.
II
1668
 NAPOL.

R. BIBLIOTECA
 VITT. EM. III

BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armadio **XXV**



Palchetto **B.**

Num.° d'ordine **33** **28586**

16.0.35

B. Prof.

II

1668



GLI ELEMENTI DELL' AGRIMENSURA

DI

GIUSEPPE ROSATI

DOTTORE DI FILOSOFIA E DI MEDICINA

QUARTA EDIZIONE

ACCRESCIUTA E MIGLIORATA CON NUOVE MISURE

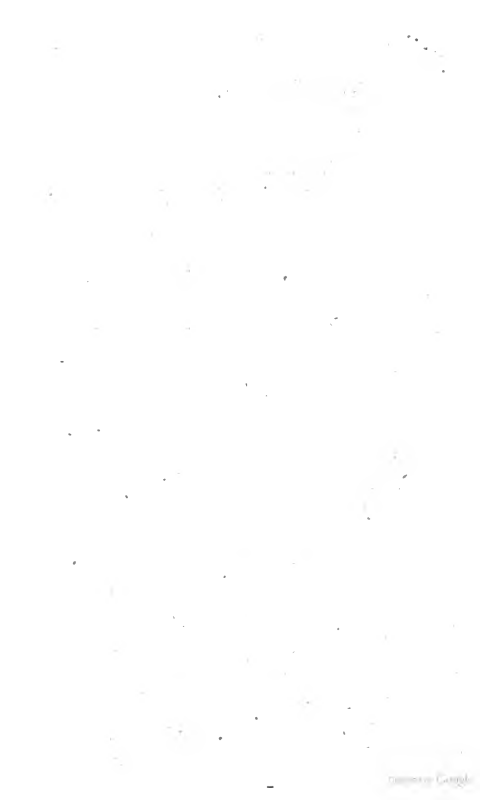


NAPOLI

STAMPERIA E CARTIERE DEL FIBRENO

Strada Trinità Maggiore, N.º 26.

1846



PREFAZIONE

QUESTA istituzione di *Agrimensura* estesa per tutti quei punti di pratica, che formano l'oggetto della presente materia, e che io attualmente espongo al pubblico squittinio, ed al pubblico uso, contiene una scientifica cognizione non consecrata ad una semplice letteraria curiosità, o particolare divertimento, ma è stata compilata per l'utile ed interesse comune, che forma l'unico cardine, su del quale perpetuamente gira il gran vortice delle umane azioni. Ed in vero se i nostri illuminati Scrittori si dessero la pena di comporre un poco meno delle letterarie piacevolezze, ed un poco più degli utili trattati, certamente, che molte Scienze rese migliori formerebbero una felicità più inconcussa, e meglio stabilita.

Dopochè gli uomini, per le cagioni a tutti palesi, furono nelle circostanze di lasciare lo stato errante, e selvatico, ed entrarono in quello di fissa dimora, e di società, si avvidero, che il godimento tranquillo della di loro vita veniva accompagnata da bisogni ben più numerosi di quelli, che i medesimi avessero potuto immaginare. Quindi la necessità di ricavare uno de' sostegni alla vita dagli armenti, e poi per un ritorno di doveri procurare ad essi de' pascoli; e di più la indispensabile coltura de' campi, costituiscono la prima base della Socie-

tà, in seguito della quale avendo fondate delle leggi costanti, ne nacque il dominio, il possesso, e la proprietà. La Pastura adunque, e l'Agricoltura, siccome furono le prime due culle, dalle quali si ottenne il proprio mantenimento, così attualmente costituiscono le due sorgenti inestinguibili de' comodi della vita, e delle ricchezze, e mediante le quali non solo le Nazioni vicine si comunicano tra di loro le proprie derrate, ma ben anche le più remote vengono ligate insieme con un reciproco utile, ed interesse.

Tra i luoghi i più felici a questi due grandi impieghi, egli sembra, che la Natura abbia graziosamente distinto il piano della nostra Puglia. Essendo situato sì fatto esteso suolo in una moderata latitudine, gode perciò di un clima contentabile, non ritrovandosi maltrattato nello inverno da' rigori del freddo soliti a sentirsi bruscamente ne' luoghi montuosi, nè viene soffogato da' cocenti raggi di un Sole estivo, comechè ventilato, e rinfrescato da per tutto. Incomincia questa singolare pianura dalle falde degli Appennini verso Occidente, e scorrendo verso la parte Orientale sino al mare Adriatico si abbassa continuamente verso del medesimo come un piano dolcemente inclinato, interrompendo da tratto in tratto la uniformità del suo livello qualche picciola gibbosità, per cui viene costituito un suolo leggiermente ondeggiante. Viene circoscritta questa vasta pianura da' monti al Mezzodi, all' Occidente, ed al Settentrione, e dal mare Adriatico all' Oriente; godendo questa parte dell' Orizzonte ortivo libero interamente. Di più irrigano questo fertile piano alcuni pochi torrenti, i quali serpeggiando pe' declivi, vanno poi a scaricarsi nel mare istesso; ma non che i medesimi apportassero verun pericolo agli abitatori, o verun ostacolo al commercio, che anzi situati in piccioli letti, prestano un comodo opportunissimo ad estinguere la sete degli armenti, ed un rinfresco pel nuoto degli stessi negli estivi ardori. Il suo terreno sebbene a primo aspetto apparisca di natura squallido, e desolato, per la ragione, che ad esso manca la coltivazione delle piante, ed alberi fruttiferi, pure esaminandosi più da vicino lo veggiam capace della più rigorosa vegetazione. Il genio, ed industria degli abitanti ha fatto sì, che sì fatta pianura fosse destinata solamente al pasco-

lo delle pecore, ed alla semina del grano, e delle biade, ed ha poi trascurata la coltura delle piante, delle selve, e degli alberi fruttiferi, comechè stimata meno utile di quel che suole arrecare il presente sistema.

Tante doti allettatrici, che seco tiene la nostra Puglia fin da secoli remotissimi, hanno quivi procurato un concorso di Pastori, e di Agricoltori, i quali hanno posto a profitto la sua superficie. Si è fin da prima stabilito, che oltre del quantitativo destinato alla semina, un'altra gran parte fosse addetta al pascolo delle pecore, che dagli Abruzzi calano nella Puglia periodicamente in ogni inverno. Ed acciocchè i Pastori fossero circoscritti ciascuno nel proprio territorio, perciò gli Agrimensori di Puglia, chiamati quivi Compassatori, sono quelle persone, che in ogni Novembre fanno la intera divisione di questo piano, assegnando ad ognuno la sua richiesta porzione.

Questo sistema forse singolare in Europa fa in modo, che la nostra Puglia sia in ogni anno minutamente divisa e misurata da questi compassatori, simboleggiano così l'antico Egitto, nel quale lo stesso costume si praticava per la ripartizione de' campi, i confini de' quali erano cancellati dalla periodica alluvione del Nilo; tantochè si è sempre creduto, che la necessità delle misure abbia ivi fatta nascere la Geometria. Viene ancora a godere la stessa sorte la nostra Puglia, mentrechè emula della Egiziana fertilità può vantarsi almeno di aver perfezionata l'arte di geometricamente saper dividere un territorio circoscritto da qualsivoglia figura.

La esattezza della misura, e della divisione de' territorii è superfluo il dire quanto sia necessaria, e quanto debba essere scrupolosa. Ella è cosa da persuadere, che nelle operazioni eseguite in campagna qualche piccolo errore sempre si trova nel risultato o in più, o in meno, specialmente trattandosi, o di figure curvilinee, o di superficie gibbose, come sono i monti, e le valli; ma questo stesso errore avvenir suole non per difetto di regola nell'operare, non per ignoranza dell'operatore, comechè informatissimo della sua arte, ma nasce per le picciole irregolarità del suolo stesso, e che sono inevitabili assolutamente nella campagna.

Siccome il dovere principale de' Compassatori è fon-

dato nella esatta misura , e nella minuta divisione dei territorii , così egli è chiaro , che esattissima si richiede la pratica di quest' ultima operazione , specialmente in tutti i casi possibili , che possono accadere . Intanto egli è da sapersi , che questa importantissima , ed intrigata parte dell' Agrimensura , cotanto necessaria nella Puglia , è stata non solo la meno coltivata , e poco intesa , ma è stata altresì sprovvista di precetti costanti , comechè posta in esecuzione da questi agrimensori per una semplice verbale tradizione da' vecchi a' giovani ; per cui sarà facile il conoscere , che sia stata soggetta a frequentissimi errori . Queste sono le persuadenti ragioni , che mi han costretto di tessere una compiuta , ed esatta istituzione della intera Agrimensura , esponendo tutte le regole teoriche , e tutte le pratiche possibili per tutto quello , che può accadere nella Configurazione , o sia nell' arte di formar le piante di qualsivoglia territorio ; nella Quadratura , o sia misura di tutte le superficie ; e finalmente nella Divisione , che costituisce la parte la più importante , la più intrigata , e la meno conosciuta .

Mi è ben noto , che celeberrimi Scrittori si abbiano data la briga di comporre degli eccellenti trattati per la Configurazione , e per la Quadratura , e che già sono alla conoscenza di tutti ; ma nessuno poi di questi valenti uomini ha voluto prendersi la pena di dare la Teoria , e la Pratica della Divisione intesa in tutta la sua estensione , ed in modo effettivamente eseguibile . Io non entro nelle ragioni , che hanno così persuasi sì fatti Matematici ; solamente posso congetturare , che siccome nella sola nostra Puglia si effettua in ogni anno questa mirabile divisione , così è mancata a costoro la necessità di doversi alla medesima applicare , ed hanno per conseguenza trascurata questa parte la più speciosa , la più sublime , e la più necessaria dell' Agrimensura istessa .

L' Opera presente , che ho avuto cura di comporre , è fatta in modo , che il novello Agrimensore dandosi il piacere di studiarla , non avrà il bisogno degli stranieri insegnamenti per tutto quello che potrebbe accadergli in materia di Configurazione , di Quadratura , e di Divisione . Suppongo solamente , che il giovane studente sia informato della sola Aritmetica sino al calcolo della Radice quadrata inclusivamente : perchè poi ho stimato su-

perfluo aggiungere a quest' Opera la scienza de' numeri tanto universalmente saputa. Conduco adunque il novizio Agrimensore nello studio di questa profondissima facoltà con quel metodo, che più mi è sembrato conveniente per ben intendere non solo la Teoria, ma la Pratica altresì estesa per tutti i punti, e casi possibili generali, affinchè poi possa riuscire speditissimo, e sicuro in tutte le operazioni. In fatti ho diviso questo trattato in sette parti, delle quali la prima contiene tutte le idee geometriche, che bisognano per la intelligenza di tutto il resto dell'opera, e mi sono contentato di esporle con quella maniera facile, quale si conviene per la istruzione dei giovani. La seconda espone, e descrive tutti que' piccioli istrumenti, che sono necessari a saper porre in disegno ogni geometrica rappresentazione, affinchè con tutta la possibile esattezza si possa descrivere qualsivoglia figura. La terza contiene un' analisi delle misure tanto di quelle, che si adattano alle lunghezze, quanto di quelle che spettano alla quadratura delle superficie. Le misure qui nominate sono quelle solamente, che si usano nella Puglia, essendo persuaso di esser cosa facilissima di sapere adattare la istessa pratica alle misure di altri luoghi.

Eseguite così queste tre parti, vengo nella quarta, la quale descrive la costruzione, e l' uso degl' Istrumenti, che si adoperano nella campagna, aggiungendo a' medesimi una esatta descrizione della bussola per sapere orientare le piante con tutti i casi possibili della sua variazione. La quinta abbraccia tutt' i metodi da poter misurare, e calcolare ogni lunghezza espressa in linee, o che queste sieno accessibili, ovvero inaccessibili. La sesta poi espone la pratica di misurare la quantità di qualunque superficie, e nel tempo istesso il modo da prendere le piante, o sia la rappresentazione delle medesime. La settima finalmente pone in veduta le regole inconcusse da poter dividere qualunque figura in tutt' i casi possibili generali, che potranno accadere. Ho stimato, per compimento di tutto questo, di esporre le regole anche della Intersecazione, che forma la parte la più meravigliosa della Divisione.

Debbo in fine avvertire, che in questo trattato sebbene sembrasse necessario di premettersi la dimostrazione di pochi Teoremi geometrici, come il fondamento su di

cui poggiano tutt' i Problemi, o siano le pratiche Agrimensorie, pur tuttavia l' esperienza mi ha fatto conoscere di esser cosa superflua. Imperciocchè i novelli Agrimensori, o sono istruiti delle teorie geometriche, ed in questo caso intenderanno senza dubbio la ragione di ogni pratica, e perciò non avranno il bisogno di quivi ritrovarle; o poi questi non ne hanno veruna conoscenza, ed allora richieggono solamente d'istruirsi nelle operazioni, e poco si curano delle geometriche dimostrazioni.

Questo trattato così disposto l' ho stimato propriissimo, ed esatto per la istruzione di tutti coloro, che in queste facoltà vogliono fissarsi, e credo nel tempo istesso di aver dato al Pubblico una compiuta istituzione agrimensoria, specialmente per la Divisione, ed Intersecazione, delle quali finora non vi è stato verun comportabile trattato. Che se per avventura questa mia qualunque fatica ad alcuni non piacesse, io fo sapere a costoro, che questa quarta Edizione da me migliorata, ed accresciuta è stata l' effetto della felice accoglienza fatta dal Pubblico imparziale alla prima, seconda, e terza edizione di quest' opera, tanto più che la medesima è riuscita col fatto sufficientissima per la pronta, facile, ed esatta istruzione dei novelli Agrimensori.

L' AGRIMENSURA



CAPO I.

I PRINCIPII

§ I.

INTRODUZIONE.

TUTTI i pezzi determinati della esterna superficie della Terra, o che sieno piani, ovvero gibbi, rappresentano quegli spazî, che si dicono *Territorii*, i quali essendo circoscritti, e terminati da tutti i di loro lati, costituiscono tante figure, o sieno rappresentazioni, le quali conservano scò essenzialmente due sole estensioni, la lunghezza, e la larghezza, non adattandosi alle medesime alcuna profondità; nè noi possiamo concepire figura senza che sia fornita di queste due estensioni.

L' *Agrimensura* è quella scienza inventata dagli uomini, per mezzo della quale si misurano esattamente queste due estensioni spettanti a qualsivoglia territorio, e sa eziandio dividere lo stesso in quante parti si richiede. E poichè necessita per lo più di non solo dover misurare, e dividere, ma di saper rappresentare in piccolo le figure de' Territorii, perciò l' *Agrimensura* istessa può comodamente dividersi in tre punti generali. E poichè giammai misura può eseguirsi, nè divisione praticarsi di un dato territorio pria che del medesimo si conosca la sua vera figura, perciò il primo nostro impegno sarà quello di saper rappresentare in piccolo la Pianta di qualsisia pezzo, o che il medesimo dinotasse un terreno aperto, o un bosco, o un lago, o un fiume, o un monte, o qualunque altro oggetto, con la esatta proporzione dei lati, e colla dovuta orientazione, o sia colla naturale posizione co' quattro punti cardinali del Mondo, e chiameremo questa prima parte *Configurazione*. Eseguita la pianta di qualsivoglia oggetto con tutta quella precisione, che si ri-



chiede, sarà facile poi di saper misurare la estensione superficiale del medesimo secondo le regole, che saremo per esporre, e che una tale operazione da noi sarà detta *Quadratura*. Finalmente deve essere un principale dovere di ogni Agrimensore saper dividere in quante parti si voglia, ed in qualunque ragione un dato territorio, e questa ultima operazione sarà detta *Divisione*, ed in questi tre punti si versa la intera Agrimensura.

La spedita esecuzione di queste tre operazioni agrimensorie porta seco l'indispensabile necessità delle matematiche cognizioni, e per tanta estensione, per quanto il preciso bisogno richiede per la intelligenza, ed esecuzione di tutte le pratiche. Quindi daremo le geometriche notizie, che sono le assolutamente necessarie per bene intendere il presente trattato, e con quella precisione, e nettezza, che merita l'acquisto di sì fatta scientifica cognizione.

§ II.

Le Definizioni.

Siccome lo scorrimento di un punto produce la linea, la quale è semplicemente lunga, così lo scorrimento laterale della linea produce la superficie, la quale gode della lunghezza, e della larghezza unite insieme. E poichè gli estremi della linea sono i punti, così gli estremi della superficie sono le linee, le quali toccandosi co' di loro estremi, racchiudono uno spazio terminato, e costituiscono la Figura.

Due sono le specie delle linee, e due quelle delle superficie. Si chiama *Linea retta* quella, che si distende a dirittura da un punto ad un altro, come AB; e si dice *Linea curva* poi quella, che dal punto dove comincia, sino al punto ove finisce non va mai a dirittura; come CE. Dippiù sarà *Superficie piana* quella, che tutti i punti di una linea retta toccherebbero nel medesimo tempo in qualsivoglia verso si ponesse questa linea sopra di questa superficie. Al contrario poi si dice *Superficie curva* quella, che tutti i punti di una linea retta non la toccherebbero nel medesimo tempo, se questa linea si ponesse sopra di questa superficie. Inoltre nella curvità delle linee, e delle superficie, quel rientramento, che si osserva verso il lato, intorno al quale si volge, si chiama *Concavità*; che se si considera dal lato, dal

quale sempre si scosta, si dice *Convessità*. La parte adunque CFE sarà la concavità, e la parte CDE sarà la convessità.

Se due, o più linee rette, o linee curve in tutta la di loro lunghezza conservino sempre tra di loro la medesima distanza, si dicono *Linee parallele*; e poichè le linee possono essere o rette, ovvero curve, così le linee AB, CD, EF sono *Rette parallele*; e le linee HI, KL, MN col nome di *Curve parallele* sono chiamate. Inoltre se più linee rette da punti differenti, come sono B, D, F si prolunghino verso i punti A, C, E, ed in questo prolungamento si avvicinano tra di loro, queste linee si dicono *Convergenti*; che se poi da' punti A, C, E verso i punti B, D, F incamminandosi, si vadano tra di loro discostando, sono dette *Divergenti*. Ora da qui avviene, che se queste linee si prolunghino pel lato della convergenza, si debbano finalmente unire nel punto G, che si chiama *Punto di convergenza*, o che le linee effettivamente ivi si uniscano, o che questa unione soltanto la immaginiamo.

Fig. 2

Fig. 3

Quando due linee inclinate fra loro si toccano in un punto, come la linea DB tocca nel punto B la linea CE, allora lo spazio compreso tra questo incontro delle due linee, come DBE si dice *Angolo*. E siccome questo spazio può essere più o meno grande a misura, che una linea s' inclina più o meno verso dell' altra, così l'angolo può essere di specie diverse. Se la linea AB incontra la linea CE in maniera, che l'angolo ABC di una parte sia uguale all'angolo ABE dell' altra parte, in questo caso la linea AB si dice *Perpendicolare* all' altra CE, e gli angoli ABC, ABE sono detti *Angoli retti*. Che se poi la linea DB tocca la linea CE in maniera, che l'angolo DBE di una parte sia minore dell'angolo DBC dell' altra parte, allora la linea DB si dice *Obliqua*, l'angolo minore si chiama *Acuto*, ed il maggiore si dice *Ottuso*; donde nasce, che l'angolo acuto è sempre minore dell'angolo retto, e l'angolo ottuso gli è sempre maggiore. Dippiù egli è d'avvertirsi, che l'angolo retto è sempre lo stesso, laddove l'acuto, e l'ottuso possono variare nella di loro grandezza. Finalmente è da sapersi, che se le due linee, che formano qualsivoglia angolo, sieno ambedue rette, l'angolo si dirà *Rettilineo*; se sieno ambedue curve, si dirà *Curvilineo*; e se sieno una retta, e l' altra curva, si dirà *Mistilineo*.

Fig. 4

Ben intesi questi primi principî, egli è tempo già di entrare nell'esame, e nella descrizione di tutte le geometriche rappresentazioni, le quali costituiscono l'oggetto principale della presente fatica. Quindi si chiamano *Figure geometriche* quelle tali rappresentazioni, che contengono uno spazio superficiale terminato, e chiuso, o da linee rette, o da linee curve, o da ambedue le specie; donde nasce, che altre sono le figure *rettilinee*, altre le *curvilinee*, ed altre poi le *mistilinee*. Queste figure in conseguenza, poichè noi le ricaviamo dalla visione de' corpi, così le medesime possono essere di un numero infinito, per cui faticosissimo riuscirebbe lo esame delle medesime. Per ovviare adunque a questo imbarazzo, da' nostri Geometri si sono divise tutte queste possibili figure in due classi, abbracciando la prima le *Figure regolari*, e la seconda le *Irregolari*. Ora è da sapersi, che tutte le figure regolari si riducono a quattro solamente, le quali sono il *Cerchio*, il *Triangolo*, il *Parallelogrammo*, ed il *Poligono*. Le figure poi irregolari vengono comprese da una sola, che si chiama *Trapezio*, il quale rappresenta tutte quelle figure, che non possono riferirsi a veruna delle quattro regolari. Esamineremo le proprietà di queste cinque figure geometriche, descrivendo i rapporti di ogni una separatamente, e per que' soli oggetti, che necessitano all'Agrimensura.

Si dice *Cerchio* una figura regolare geometrica, terminata da una linea curva rientrante in se stessa, come BCFED, chiamata *Circonferenza*, o sia *Periferia*. Lo spazio racchiuso da questa circonferenza si dice *Piano*, ovvero *Area circolare*, ed il punto A, che sta nel mezzo di questo piano, dicesi *Centro*. Ma acciocchè questo punto possa dirsi centro, egli è necessario, che tutte le rette tirate da questo punto, e terminate alla circonferenza, come AE, AF, AC, AB, AD debbano essere tutte uguali tra di loro. Queste linee così fatte si chiamano *Raggi*, ovvero *Semidiametri*: Che se poi ad un raggio si unisca un altro dalla parte opposta in maniera, che formino una sola linea retta, che passa assolutamente pel centro, e termina in due punti opposti della circonferenza, come DF, BE, allora questa tale linea si chiama *Diametro*. Di qui avviene, che il diametro passando pel centro del cerchio, divide il piano circolare in due porzioni uguali, che si chiamano *Semicerchi*; tutti i diametri tirati in un cerchio sono tutti uguali tra di loro, comechè formato

Fig. 5

ciascheduno da due raggi; e quanti diametri si tirano nel cerchio, tutti s'intersecano nel centro in due porzioni uguali.

Inoltre se nel cerchio si tiri qualunque altra linea retta GH, che non passa pel centro A, la medesima si dice *Corda*, ovvero *Sottesa*. E poichè il diametro divide il cerchio in due semicerchi uguali, così la corda lo divide in due porzioni disuguali, chiamati *Segmenti*, uno maggiore, il quale contiene il centro, e l'altro minore, che non lo contiene. Dippiù, siccome il diametro divide il piano circolare in due semicerchi uguali, così viene a dividere eziandio la circonferenza in due *Semicirconferenze* uguali tra di loro; laddove poi la corda dividendo il cerchio in due segmenti disuguali, divide benanche la circonferenza in due porzioni disuguali, chiamati *Archi*, uno minore, e l'altro maggiore. Intanto egli è da sapersi, che lo spazio compreso tra due raggi, e la corrispondente porzione della periferia, come DAB, BAC si chiama *Settore del cerchio*. Finalmente se ad un diametro tiriamo un altro diametro a perpendicolo, in questo caso tutto il piano circolare verrà diviso in quattro parti uguali, e tutta la circonferenza anche in quattro porzioni uguali, che si chiamano *Quadranti*, ed i due diametri costituiscono nel centro, dove s'intersecano tra di loro, quattro angoli retti.

La circonferenza del cerchio vien conceputa divisa da' Geometri in 360 particelle uguali, che si dicono *Gradi*, ed ogni grado in 60 *minuti primi*, ed ogni minuto primo in 60 *secondi*, e così di seguito, scrivendosi co' segni seguenti: $52^{\circ}, 43', 25''$, che dicono: *Cinquanta due gradi, quaranta tre primi, e venticinque secondi*. La circonferenza così divisa serve a misurare il valore di ogni angolo, facendo centro nell'angolo istesso, ed intervallo ad arbitrio, e si descrive la circonferenza; ora l'arco della circonferenza, compreso tra i due lati dell'angolo, quanti gradi, e minuti contiene, di tanto per appunto è il valore, o sia la grandezza dell'angolo. Seguendo adunque questa idea si scorge chiaro, che siccome la intera circonferenza costa di 360° , così la semicirconferenza sarà di 180° , e la quarta parte di 90° ; donde nasce, che la quarta parte misurando sempre l'angolo retto, il medesimo sarà sempre di 90° , un angolo acuto sempre meno di 90° , un angolo ottuso sempre più di 90° , ma sempre meno di 180° .

Si dice *Triangolo* una figura regolare geometrica la più

Fig. 6 semplice di tutte le figure rettilinee, formata da tre linee rette, le quali, toccandosi tutte colle di loro estremità, racchiudono lo spazio. Così la figura ABC sarà un Triangolo, del quale le due linee rette AB, AC si dicono *Lati*, e la terza BC sopra della quale poggiano i due lati, si chiama *Base*, e lo spazio racchiuso da' lati, e dalla base si dice *Area triangolare*. Formando inoltre queste tre linee nelle di loro unioni tre angoli, ne viene in conseguenza, che ogni triangolo, siccome è formato da tre lati, così contiene eziandio tre angoli. L'angolo fatto nella unione A perchè opposto alla base, si dice *Angolo del vertice*, e gli altri due fatti in B, ed in C si dicono *Angoli alla base*. Finalmente la perpendicolare AL tirata dal vertice alla base, si chiama *Altezza del triangolo*.

Ogni triangolo avendo tre lati, e tre angoli, si può considerare tanto relativamente a' lati, quanto relativamente agli angoli. Se un triangolo abbia i suoi tre lati tutti uguali, come ABC si dice *Equilatero*; se ne abbia due solamente uguali, ed il terzo maggiore, o minore di ciascheduno di essi, come HKI, si dice *Isoscele*; se finalmente gli abbia tutti tre disuguali, come FDE, GMN si dice *Scaleno*. Inoltre se un triangolo abbia i suoi tre angoli tutti acuti, come ABC, ovvero HKI si dice *Triangolo acutangolo*; se ne abbia due acuti, ed uno retto, come FDE, si dice *Triangolo rettangolo*; e se ne abbia due acuti, ed uno ottuso, come GMN si dice *Triangolo ottusangolo*, nel quale l'angolo ottuso GNM è maggiore del retto GNO. Ora qui egli fa uopo di avvertire, che nel triangolo rettangolo FDE, il lato FE opposto all'angolo retto D, si chiama *Ipotenusa*, ed i lati FD, ED, i quali formano in D l'angolo retto, si dicono *Cateti*. Finalmente, si dice *Perimetro*, ovvero *Ambito*, il contorno di qualsivoglia figura geometrica, o che sia regolare, o che sia irregolare.

Fig. 7 Si dice *Parallelogrammo*, ovvero *Quadrilatero regolare* un'altra figura regolare geometrica rettilinea, la quale viene formata da quattro linee rette, che si uniscono co' di loro estremi, e racchiudono lo spazio. Se tutte quattro queste linee sono uguali tra di loro, le opposte sono parallele, ed i quattro angoli tutti retti, come ABDC, si dice *Quadrato*. Se poi di queste quattro linee solamente le opposte sieno uguali, e parallele, ed anche gli angoli tutti quattro retti, come EFHG, si dice *Rettangolo*. Che se poi una fi-

gura quadrilatera abbia i suoi quattro lati tutti uguali, gli opposti paralleli, ma i quattro angoli non siano retti, ma due acuti, e due ottusi, come IKLM, si dice *Rombo*. Finalmente si chiama *Romboide* quando un quadrilatero, come NOQP, abbia solamente i lati opposti uguali, e paralleli, ed i suoi quattro angoli non sieno retti, ma due acuti, e due ottusi. Egli è mestieri di avvertire, che in qualsivoglia di questi parallelogrammi se tiriamo una retta da un angolo all'altro angolo opposto, come BC, EH, questa tale retta si chiama *Diagonale*, la quale divide ogni parallelogrammo in due triangoli uguali.

Si dice *Poligono*, ovvero *Moltiplicato regolare* l'ultima figura regolare geometrica rettilinea, la quale vien formata da linee rette tutte uguali tra di loro, ma che le medesime sieno più di quattro, incominciando da cinque sino all'infinito, le quali, unite colle di loro estremità, racchiudono lo spazio. Se un poligono abbia cinque lati tutti uguali fra di loro, come ABCDE, egli è il più semplice di tutti i poligoni, e si chiama *Pentagono*, del quale il punto F, che sta nel mezzo ne costituisce il centro, e dal quale se si tirino a ciascheduno de'suoi cinque angoli del perimetro cinque linee rette, le medesime, come raggi, sono uguali fra di loro, e dividono il pentagono in cinque triangoli uguali, i quali co'di loro vertici costituiscono nel centro cinque angoli acuti. Se un poligono abbia sei lati uguali fra di loro, come il poligono G, si dice *Esagono*, se ne abbia sette lati uguali, come H, si dice *Eptagono*; se ne abbia otto lati uguali, come I, si dice *Ottagono*, e così all'infinito.

Fig. 8

Dalla esposta definizione de' poligoni si ricava, che di qualsivoglia poligono, se si tirino dal suo centro agli angoli del suo perimetro tante linee rette, il medesimo poligono verrà diviso in tanti triangoli uguali, quanti sono i suoi lati componenti. Di più, che la circonferenza del cerchio possiamo immaginarla per un poligono d'infiniti lati. Finalmente, che ogni poligono incluso in un cerchio ha il centro comune col cerchio, e tutti i suoi angoli toccano ad ugual distanza la concavità del cerchio istesso.

Si dice *Trapezio* quella figura geometrica, che abbraccia ogni specie di figure irregolari, e sono tutte quelle, che noi non possiamo riferire nè al Cerchio, nè al Triangolo, nè al Parallelogrammo, nè al Poligono, e che finora abbiamo descritte. Intanto per procedere con esattezza nella de-

scrizione de' Trapezzi, noi distingueremo i medesimi in due classi. Abbraccia la prima classe tutti que' trapezi, che sono formati da quattro linee rette, delle quali due opposte sieno parallele, ma non uguali; e comprende la seconda classe tutti i trapezi formati da più di quattro linee sino all'infinito, tra' quali vien compreso anche il trapezio di quattro lati, del quale non vi sia parallelismo ne' suoi lati opposti. Poichè la prima classe contiene que' trapezi di quattro lati, de' quali due lati opposti sieno solamente paralleli, ma non uguali, perciò si dicono questi *Capotagliati*; e perchè la seconda classe contiene que' trapezi, che non hanno parallelismo tra i due loro lati opposti, perciò sono detti quest'ultimi *Trapezi irregolari*, e che noi minutamente descriveremo.

Di tutti i trapezi Capotagliati ve ne sono di due specie.
 Fig. 9 Se si abbia un trapezio di quattro lati, come $ABDC$, di cui i due lati opposti AB , CD sieno paralleli, ma non uguali, e di più, che un altro lato AC sia perpendicolare ad essi, in maniera, che formi l'angolo retto in A , ed in C , allora questo trapezio di quattro lati si dice *Capotagliato rettangolo*. Se poi si abbia un altro trapezio di quattro lati, come $EFHG$, del quale i due lati opposti EF , GH sieno paralleli, ma non uguali, e di più, che non abbia verun angolo retto, in questo caso un tale trapezio di quattro lati si chiama *Capotagliato obliquangolo*. Fuora di questi casi, ogni altro trapezio di quattro lati, che non abbia parallelismo tra i suoi lati opposti, ancorchè avesse un angolo retto, va poi compreso nella seguente classe.

I Trapezzi irregolari contengono due specie de' medesimi. Se si abbia un trapezio irregolare formato, o da quattro, o da cinque o da più lati, come $IKLMN$, e che tutti i suoi angoli abbiano il vertice al di fuori, in questo caso un tale trapezio vien detto *Trapezio ad angoli sporgenti*. Se poi si abbia un altro trapezio irregolare, formato da qualsivoglia numero di lati, come $OPQRS$, e che molti de' suoi angoli abbiano il vertice al di dentro; allora questa figura viene chiamata *Trapezio ad angoli rientranti*.

Queste sono le definizioni, che abbiamo stimate le più necessarie di tutte le figure geometriche regolari, ed irregolari, e che facilitano la via per la intelligenza di tutte le altre cognizioni, che si esporranno nel prosiegua.

CAPO II.

IL DISEGNO

§. 1.

Gli Strumenti piani.

Dopo la chiara esposizione di tutti i principi, ed oggetti rappresentativi, che si sono presi dalla Geometria, e de' quali indispensabilmente dovremo far uso nella pratica esecuzione di tutte le future operazioni, i medesimi resterebbero inutili, se noi non li sapessimo rappresentare, ed esattamente disegnare sulla carta, o sopra qualunque altro piano, affinchè ci spianassimo la strada per la formazione, e disegno delle Piante rappresentanti i territorii, e ne' quali fissiamo lo scopo delle presenti nostre fatiche. Questo tale meccanismo si eseguisce mercè il ministerio di alcune machinette, che noi diciamo *Strumenti piani*, mediante i quali eseguiamo ogni rappresentazione sul piano.

I matematici in differenti tempi, ed in luoghi diversi hanno inventata una serie grandissima di strumenti per facilitare, ed eseguire con esattezza tutti i disegni, o siano tutte quelle figure, che occorreranno, e che l'obbligo c'impone di rappresentare. Si fatti strumenti sono di numero grandissimo, gran parte de' quali sono alieni dal nostro istituto; per cui ci limiteremo alla descrizione, ed uso di que' soli, che sono gli assolutamente necessari per la pratica disegnatoria.

Il primo di questi strumenti è la *Riga* ben conosciuta da tutti. Questa suole farsi per lo più di legno duro, e di quella lunghezza, che si conviene. Alcuni la fanno costruire di ottone, ma poi si è conosciuto in pratica, che si fatto metallo sporca la carta, su di cui si adatta, nè riesce di tanta cedevolezza da potersi bene combaciare colla medesima. Serve la Riga a tirare le linee rette, che occorrono, da un punto ad un altro.

Il secondo strumento è il *Toccalapis*, che è un cannello, o di legno, ovvero di ottone, ai di cui estremi si fissa immobilmente la pietra matita, ch'è di un colore piombino oscuro. Con sì fatto arificio possiamo facilmente tirare delle linee, che debbono poi essere punteggiate colla penna, e dopo eseguito tutto questo si toglie il colore della matita, mercè

lo stropiccio fatto colla midolla del pane. Queste linee punteggiate si dicono *Linee occulte* per differenziarsi dalle linee tutte nere, le quali debbono servire per l'effettiva rappresentazione delle figure.

Il terzo strumento è il *Compassetto*, di cui ognuno ne ha conoscenza. Questa machinetta è di ottone, ma le sue punte sono di acciaio. Una di queste punte suole farsi amovibile, perchè qualche volta si richiede di adattarvi un'altra punta fornita colla pietra matita per tirare gli archi occulti. Il Compassetto serve per prendere esattamente quelle lunghezze, che bisognano pel disegno delle figure, che si fanno sulla carta.

Il quarto strumento è la *Scala*, o sia la *Linea delle parti uguali*. Questa viene rappresentata da una linea retta AB lunga quanto si vuole, segnata sopra una riga metallica, o sopra altro corpo duro. Questa linea dovrà dividersi tutta in particelle uguali, come qui sono 100, e le medesime debbono essere piccole per quanto sia possibile. Queste tali particelle tutte fra di loro uguali non rappresentano veruna misura, ma possono significare tutte le misure, intese però tutte di una sola specie, come o tutte miglia, o tutte passi, o tutte palmi, secondo che il disegno, che dovrà farsi in piccolo sulla carta sia di grande, o di piccola estensione, e che nel tempo istesso dovrà farsi di una sola specie di misura. L'uso di questa linea delle parti uguali è facilissimo a capirsi. Se si dovrà rimettere in piccolo in una carta una figura qualunque di territorio, i di cui lati si sieno misurati co' passi, allora le particelle della linea rappresentano i medesimi passi, senza far conto de' palmi, che forse in qualche lato misurato si sieno trovati, giacchè i medesimi svaniscono quando la intera rappresentazione si riduca in piccolo. Molto più svaniranno i palmi, ed i passi, quando il disegno rappresenta una Provincia, i di cui lati si fossero misurati a miglia.

Il quinto strumento è la *Squadrella*, formata da due righe di qualsivoglia materia dura, ed unite ad angolo retto, formando il pezzo ABC rettangolo in B. L'uso della Squadrella è non solo di poter formare un angolo retto, e di tirare una linea perpendicolare sopra di un'altra sulla carta; ma di esplorare se un angolo già fatto sia effettivamente retto, e se una linea sia perpendicolare ad un'altra. Questo si ottiene coll'adattare l'angolo retto della Squadrella sopra le linee già segnate, e conoscerne il risultato.

Il sesto strumento è il *Semicerchio* rappresentato da ADBC, e che suole costruirsi o di ottone, o di altra sostanza dura. Egli è diviso nella sua semicirconferenza in 180° . Nel centro C vi è una picciola apertura per riconoscere il centro stesso. Il Semicerchio serve a due usi. Quando accade di dover fare un angolo uguale ad un altro dato, in questo caso si ponga lo strumento sopra dell'angolo dato in maniera, che il centro C caschi sopra del vertice dell'angolo dato, ed il raggio CB sopra uno de' lati, e fingendo, che l'altro lato sia CE, il quale segnando l'arco in 45° , avremo l'angolo dato ECB di 45° ; quindi tirata una retta, ed adattatovi sopra il Semicerchio, ne formeremo un altro uguale. L'altro uso è di misurare qualsivoglia angolo dato, adoperando lo strumento nel modo che abbiamo descritto. Fig. 12

§ II.

Li Problemi.

Dopo di aver ben compresi li descritti piccioli strumenti, egli è uopo di applicare sì fatte conoscenze all' uso de' medesimi per la facile, e spedita esecuzione del disegno sopra tutte quelle cose, che nelle definizioni abbiamo esposte.

I. Data una linea retta, tirarci sopra una perpendicolare. In questo Problema due casi possono accadere. Sia per primo caso la retta AB, ed in essa ad arbitrio il punto C, su di cui debbasi tirare la perpendicolare. Per tirarla si farà uso della Squadrella nel modo seguente. L'angolo interno di questo strumento si adatti nel punto C, ed un lato si adatti sopra CB, l'altro lato della Squadrella si disporrà necessariamente nel sito CD; quindi si segni un punto in D, e di poi usando la riga si tiri la linea DC o tutta nera colla penna, ovvero occulta col Toccalapis, e questa sarà la richiesta perpendicolare. Fig. 13

Sia per secondo caso la retta AB, nel di cui estremo A si debba tirare la perpendicolare. Per eseguirlo, si farà il medesimo artificio del caso antecedente, col porre l'angolo interno dello strumento nel punto A, ed un suo lato nella retta AB, mentrè l'altro lato segnerà la EA, che è la perpendicolare ricercata.

II. Descrivere un triangolo equilatero. Colla Riga si tiri la base BC, poi col Compassetto si faccia centro in C, ed in- Fig. 14

tervallo CB, e si descriva l'archetto occulto A; indi col centro B, ed intervallo BC, e si descriva l'altro archetto occulto, che interseca il primo nel punto A. Ora da questo punto si tirino AB, AC, ed il triangolo ABC sarà il triangolo equilatero, che si cercava.

Fig. 15 III. *Descrivere un triangolo isoscele.* Si tiri la base BC, indi col centro C, ed intervallo, o più lungo, o più corto di BC si descriva un archetto occulto A; poi col centro B, e col medesimo intervallo si descriva l'altro archetto occulto, che interseca il primo nel punto A. Ora da questo punto si tirino AB, AC, ed il triangolo ABC sarà il triangolo isoscele, che si cercava.

Fig. 16 IV. *Descrivere un quadrato.* Si tiri AB; indi dal punto estremo A col Compassetto si descriva l'archetto occulto C, facendo la distanza AC uguale ad AB; di poi sul medesimo estremo A colla Squadrella si tiri la perpendicolare CA. Fatto questo, dall'estremo C si descriva l'archetto occulto D, la di cui distanza sia uguale a CA, ovvero AB, che è lo stesso; di poi dall'estremo B, e col medesimo intervallo si descriva l'altro archetto occulto D, che interseca il primo. Ora dal punto D tirate le rette DC, DB, la figura ABDC sarà un quadrato.

Fig. 17 V. *Descrivere un parallelogrammo.* Si tiri AB; indi dal punto estremo A si tiri l'archetto occulto C, facendo la distanza AC più corta, o più lunga di AB; di poi sul medesimo estremo A si tiri la perpendicolare CA. Fatto questo, dall'estremo C si descriva l'archetto occulto D, la di cui distanza sia uguale ad AB; di poi dall'altro estremo B, e col l'intervallo BD uguale ad AC si descriva l'altro archetto occulto D, che interseca il primo. Finalmente dal punto D tirate le rette DC, DB, la figura ABDC sarà il parallelogrammo.

Il descritto parallelogrammo è stato un rettangolo; ma quando poi si dovesse descrivere un obbliquangolo, come un Rombo, o un Romboide, si farà così. Si tiri AB, indi dall'estremo A, e con quell'apertura del Compassetto, che si conviene, si descriva l'archetto occulto C, e colla stessa apertura, dall'estremo B si descriva l'altro archetto occulto D; di poi nell'archetto C si determini un punto C, secondo l'obliquità degli angoli, che si vogliono; ed indi fatto centro in C, e coll'intervallo CD uguale ad AB si descriva l'altro archetto occulto D, che interseca il primo. Fatto que-

Fig. 18

sto, si tirino CA, CD, DB, e la figura ABDC sarà l'obliquangolo ricercato.

VI. *Tirare una retta parallela ad un'altra.* Sia data la retta AB, ed il punto C, dal quale si vuole tirare la parallela. Si prenda col Compassetto la distanza CA; e colla stessa apertura si faccia centro in B, e si descriva l'archetto occulto D; di poi dal punto C, e pel punto tangente D, con una Riga, si tiri CD, e questa sarà la parallela ricercata.

Fig. 19

VII. *Dato un angolo farne un altro uguale.* Sia dato l'angolo ABC, e la retta EF; fa uopo sulla retta EF fare un angolo uguale al dato ABC. Per eseguir tutto questo, ci possiamo servire di due metodi differenti. Il primo è così. Col Compassetto si faccia centro in B, ed intervallo ad arbitrio BC, e si descriva l'archetto occulto CA; poi col centro E, e col medesimo intervallo EF si descriva l'archetto occulto FD; finalmente facendo FD uguale a CA, dal punto D si tiri DE, e diverrà l'angolo DEF uguale all'angolo ABC, che si cercava.

Fig. 20

Il secondo metodo è così. Col Semicerchio si misuri l'angolo dato ABC, e si notino i gradi del suo valore; indi si ponga lo strumento col centro suo in E, ed un raggio si adatti sopra EF, e poi si veggia in qual punto D corrispondano i gradi ritrovati, ed ivi si segui un punto, dal quale tirata DE, avremo l'angolo DEF uguale al dato ABC, che si voleva.

VIII. *Descrivere un poligono.* Poichè i poligoni possono cominciare da cinque lati sino all'infinito, perciò noi faremo uso della regola generale, che è comune a tutti. Si descriva prima una circonferenza occulta, ed in essa il suo diametro anche occulto; questo diametro si divida in tante parti uguali, quanti sono i lati del poligono, che si vuole descrivere; di poi si trovi l'intersecazione fatta con un intervallo uguale al diametro, e separando sempre due sole parti di questo diametro, si collinei il punto della intersecazione col punto delle due parti, e la Riga darà un punto nella circonferenza. Ora l'intervallo tra questo punto, e l'estremo prossimo del diametro sarà un lato del poligono, il quale ripetuto quanto conviene, darà il poligono ricercato.

Sia dunque da descriversi un Poligono di sette lati. Si descriva la circonferenza occulta AEH, ed in essa il suo dia-

Fig. 21

sette lati, e di queste sette parti se ne separino due AK. Indi fatto centro in A, e poi in B, e coll'intervallo uguale al diametro, si faccia l'intersecazione C. Di poi colla Riga collineando i punti C, e K, si segni il punto G nella circonferenza; e l'intervallo AG sarà un lato del poligono, il quale ripetuto per H, I, F, E, D, darà la figura del poligono, che si cercava.

La esecuzione di questi Problemi solamente abbiamo stimata necessaria per saper porre in disegno qualunque figura, la quale rappresenti la pianta di qualsivoglia territorio, o sia di quelle figure superficiali, che si ricavano dalla superficie della Terra.

CAPO III.

LE MISURE

§. I.

La misura lunga

Dopo che ognuno sia nel caso di saper disegnare ogni figura rappresentante quegli oggetti, che siamo in dovere di conoscere, le medesime rappresentazioni dovranno poi additare la precisa di loro grandezza, e quantità, la quale deve nascere dalle misure, che si prendono nella campagna, e che qui noi descriviamo in tutte le di loro specie. Quindi tutte le misure, delle quali nell'Agrimensura ci è il bisogno, si riducono a due specie. La prima si chiama da noi *Misura lunga*, perchè la usiamo nella ricerca delle sole lunghezze. La seconda si dice *Misura quadrata*, perchè mettiamo in opera la medesima per la determinazione delle superficie, valutandone tutta la estensione in lungo, ed in largo, per cui diciamo eziandio *quadratura*. Fuora di queste due specie di misure, non vi è altro che possa entrare nella presente pratica agrimensoria. Intanto egli è da osservarsi, che di queste due specie di misure, noi non brigandoci di tutte quelle inventate in ciascheduna specie, e che si adattano a diversissimi oggetti, o che si usano in luoghi differenti, esporremo di ciascheduna soltanto quelle misure, che bisognano al caso nostro, e che necessitano all'Agrimensore.

La misura lunga adoperata nella Puglia si riduce alle so-

guenti denominazioni. La misura massima si dice *Catena*, la prossima minore si dice *Passo*, la sua vicina si chiama *Palmo*, questo ha l'*Oncia*, e questa contiene i *Minuti*. Ora la di loro progressione va così intesa. La *Catena* si divide in 10 passi, il *Passo* in 7 palmi, il *Palmo* in 12 once, l'*Oncia* in 5 minuti, ed il *Minuto* non è ulteriormente divisibile. Avvertasi, che nella pratica si costuma di sempre contare le lunghezze a catene, ed a passi, mentrechè de' palmi non se ne ha conto, e molto meno delle once, e de' minuti.

La pratica agrimensoria fa uso solamente delle catene, e de' passi, nè si briga delle altre specie minori delle misure lunghe. Intanto potrebbe accadere, che si dovessero rappresentare estensioni assai grandi, ovvero assai picciole, ed in tal caso ci bisogna eziandio la conoscenza delle grandi, e delle picciole misure lunghe. La più lunga misura, che si conosca è il *Miglio*. Ogni miglio si divide in 100 *Catene*, ovvero 875 *Canne*, ovvero 1000 *Passi*. E poichè ogni catena si divide in 10 passi, ed ogni passo in 7 palmi, così ogni canna è divisibile in 8 palmi. Ogni palmo poi si divide in 12 once, o sieno *Pollici*, ed ogni pollice in 12 *Linee*, e dagli artefici si divide in 5 minuti, i quali poi restano indivisibili.

§. II.

La Misura quadrata

La estensione della semplice lunghezza si può esattamente conoscere ogni qualvolta facciamo uso delle misure lunghe finora esposte; ma non così avviene quando si voglia conoscere il valore delle superficie, che sono estensioni lunghe, e larghe insieme unite. I Geometri hanno immaginata la *Misura quadrata* per adattarsi alla superficie, la quale va intesa così. Ogni specie di misura lunga di già descritta, perchè rappresenta una linea, perciò sopra di questa linea si faccia un quadrato, ed in questo modo avremo una superficie quadrata di quella specie, che rappresenta la linea su di cui è formata.

Le misure quadrate, che si usano nella Puglia sono delle seguenti denominazioni. La misura massima si dice *Carro*, la prossima minore si dice *Versura*, la sua vicina è la *Catena*, e l'ultima è il *Passo*. Ora la di loro progressione è così. Il *Carro* è una superficie quadrata, che contiene 20 ver-

sore quadrate. La *Versura* è una superficie quadrata, che contiene 36 catene quadrate. La *Catena* è una superficie quadrata, che contiene 100 passi quadrati. Il *Passo* è una superficie quadrata, che ha 49 palmi quadrati.

Di qui segue, che il *Carro*, poichè contiene 20 versure quadrate, possiamo anche dire 720 catene quadrate, che si uguagliano a 72000 passi quadrati, ovvero sono 3528000 palmi quadrati. Quindi il carro avrà per lato di fronte, o sia radice, che è propriamente il *Lato*, una lunghezza di 26 catene lunghe, ed $8\frac{2}{3}$ passi lunghi, o sieno 268 $\frac{2}{3}$ passi lunghi, ovvero ridotti tutti a palmi sono 1978 $\frac{2}{3}$. La *Versura* contiene 36 catene quadrate, o sieno 3600 passi quadrati, ovvero 176400 palmi quadrati, per cui la versura avrà per lato una lunghezza di 6 catene lunghe, o sieno 60 passi lunghi, ovvero 420 palmi. La *Catena* contiene 100 passi quadrati, ovvero 4900 palmi quadrati, ed ha di lato 10 passi lunghi, o sieno 70 palmi. Il passo finalmente contiene 49 palmi quadrati, ed ha per lato 7 palmi.

Queste sono le misure quadrate, che si usano nella pratica dagli Agrimensori per la valuta superficiale di tutte le piante de' territorii, che costoro rilevano nella campagna. Se inoltre si dovessero valutare grandi estensioni, ovvero picciole assai, allora si porranno in uso le grandi, e le picciole misure lunghe ridotte in quadratura. Così il *Miglio quadrato* è una superficie quadrata, che ha un miglio lungo per ogni lato, e che contiene 765625 canne quadrate, ovvero 10000 catene quadrate; ovvero 1,000,000 di passi quadrati, ovvero 49,000,000 di palmi quadrati. Di qui si comprende, che il miglio quadrato contiene 14 carri, ovvero 280 versure. Il miglio quadrato adunque avrà di lato 7000 palmi di lunghezza. Finalmente per le misure quadrate di picciola estensione, si conosce chiaramente, che la *Canna quadrata* contiene 64 palmi quadrati, ed il *Passo quadrato* ne ha 49; giacchè la canna ha otto palmi lunghi di lato, ed il passo ne ha 7. Inoltre il *Palmo quadrato* contiene 144 pollici quadrati, o sieno once quadrate; e finalmente il *Pollice quadrato*, o sia *Oncia quadrata* contiene 144 linee quadrate, ovvero 25 minuti quadrati.

Affinchè poi si possa ben capire come le misure lunghe si riducono in quadrate, per indi comprendere, come le medesime si adattano alla quantità delle aree superficiali, egli è mestieri di sapere, che in ogni figura rettangola, misu-

rando due lati, che sono uniti ad angolo retto, e moltiplicandoli tra di loro, il prodotto che ne nasce, darà il numero delle misure de' lati ridotte in quadratura, e le quali poi comprendono tutto lo spazio della figura. Così sia il Rettangolo ABDC, del quale i due lati AC, AB, che sono uniti in A ad angolo retto, si misurino, e sia CA di 5 passi, ed AB di 12. Questi due numeri si moltiplicano tra di loro, e si avrà il prodotto di 60 passi ridotti in quadrati. Imperciocchè dividendo effettivamente AC in 5 parti uguali, ed AB in 12, e tirando le parallele per ciascheduna divisione, si formeranno 60 quadrati, i quali occupano tutta la superficie del detto rettangolo, e dinotano la intera sua quantità in misure quadrate.

Fig. 22

§. III.

Le Misure Nuove.

Le Misure finora descritte sono quelle usate tanto per conoscere le lunghezze, quanto le superficie, o sieno le Quadrature adatte alla pratica agrimensoria; ma poichè si sono introdotte le *Misure nuove*, le quali debbono servire di regola per tutte le operazioni consimili, che riguardano le due enunciate quantità della Lunghezza, e della Quadratura delle superficie, così egli fa uopo di farle conoscere, affinchè negli affari occorrenti ne potessimo far uso.

Sebbene le Misure passate non sieno porzioni esatte delle Misure nuove, o sieno di loro parti aliquote, per cui la estensione, e grandezza delle prime non corrispondano precisamente alla estensione, e grandezza delle seconde, pur tuttavia per intendere bene le Misure nuove, noi paragoneremo alle medesime le Misure passate.

Nelle Misure passate si aveva il *palm* come una quantità, o sia lunghezza fissa, dalla quale ne nascevano le lunghezze maggiori composte da' palmi, e le lunghezze minori prese dalle divisioni del medesimo palmo. Così il *passo* era una lunghezza di 7 palmi; la *canna* di 8 palmi, la *catena* era una lunghezza di 10 passi, o sieno 70 palmi; indi 6 catene, che sono 60 passi, ovvero 420 palmi, faceva il lato della *versura*; e finalmente 7000 palmi, o sieno 1000 passi, o pure 875 canne, ovvero 100 catene formava il *miglio*.

Queste erano le misure di lunghezza sempre crescendo so-

pra del palmo. Le misure poi, che derivavano dalla suddivisione del palmo, erano le seguenti. Il *pollice* era la dodicesima parte del palmo; e la *linea* era la dodicesima parte del pollice. Il palmo adunque era la quantità fissa di lunghezza, che stava nel mezzo tra le lunghezze maggiori crescendo, e tra le lunghezze minori diminuendo; o sia il punto di partenza tra le quantità ascendenti, e le quantità discendenti.

La nuova lunghezza fissa, stabilita come un punto di mezzo, tra le lunghezze maggiori ascendendo, e le lunghezze minori discendendo, si dice *metro*. Ma affinchè si possa capire quanta sia questa lunghezza del Metro, egli è a farsi la seguente considerazione. Il metro si divide in 10 parti uguali, che si dicono *decimetri*; e poichè ogni decimetro si suddivide in altre 10 particelle uguali, perciò tutto il metro resta diviso in 100 particelle dette *centimetri*: e di più ogni centimetro suddividendosi in altre 10 particelle uguali, perciò il metro viene diviso in 1000 di queste particelle, le quali si dicono *millimetri*; tantochè ogni metro si concepisce diviso, o in 10 decimetri, o in 100 centimetri, o pure in 1000 millimetri.

Ben inteso tutto questo, se noi adattiamo il palmo sopra di questo metro, troveremo, che il palmo sia lungo 2 decimetri, 6 centimetri, e 3 millimetri; o sia, che questo palmo sia lungo 263 di questi millimetri, tantochè la lunghezza di *quattro palmi* corrisponde ad una lunghezza di *uno metro*, e 52 *millimetri*, o sieno 1 *metro*, 5 *centimetri*, e 2 *millimetri*.

Essendo il Metro la quantità fissa, che sta nel mezzo tra le lunghezze maggiori ascendenti, e le lunghezze minori discendenti, perciò queste procedono nel modo seguente. Le lunghezze maggiori ascendenti sono. Una lunghezza di 10 metri si dice *decametro*; una lunghezza di 100 metri, si dice *ettometro*; una lunghezza di 1000 metri, si dice *chilometro*; ed una lunghezza di 10000 metri, si dice *miriametro*. Per l'opposto le quantità, o sieno lunghezze minori discendenti vanno intese così. La decima parte del metro, si dice *decimetro*; la centesima parte, si dice *centimetro*; e la millesima parte, si dice *millimetro*. La maggiore comodità di queste Misure nuove consiste, che tanto nelle lunghezze crescenti ascendendo, quanto nelle lunghezze minori discendendo, si osserva la ragion decupla, o sia la progressione decimale.

In conseguenza di quanto abbiamo esposto, egli fa uopo di venire alla pratica di saper valutare la misura vecchia colla nuova, e la misura nuova colla vecchia, come eseguiremo ne' seguenti problemi.

1. *Data una misura lunga vecchia saperla valutare in misura lunga nuova.* Qualunque sia la misura lunga vecchia data, come palmi, passi, canne, catene, miglia, bisognerà indispensabilmente ridurla tutta a soli palmi. Fatto questo si farà così. Sia data una lunghezza vecchia di 39 passi, e 2 palmi. Si cerca di sapere a quanta misura nuova, o sia lunghezza nuova corrisponda. Per eseguirlo, poichè li 39 passi fanno 273 palmi, a questi uniti gli altri 2 palmi, avremo 275 palmi. Indi poichè ogni palmo è lungo 263 millimetri, o sieno 2 decimetri, 6 centimetri, e 3 millimetri, perciò li 275 palmi si moltiplicano per 263, ed avremo per prodotto 72325 millimetri. E poichè ogni metro contiene 10 decimetri, ovvero 100 centimetri, o pure 1000 millimetri, perciò il numero 72325 millimetri diviso per 1000 darà per quoziente 72 metri, e 325 millimetri o siano 72 metri, 3 decimetri, 2 centimetri, e 5 millimetri; o pure 7 decimetri, 2 metri, 3 decimetri, 2 centimetri, e 5 millimetri, e questa è la misura nuova corrispondente alla data misura vecchia.

2. *Data una Misura lunga nuova, saperla valutare in Misura vecchia lunga.* Qualunque sia la Lunghezza nuova data, bisognerà prima ridurla tutta a millimetri. Fatto questo si farà così. Sia data una Lunghezza nuova di 72 metri, 3 decimetri, 2 centimetri, e 5 millimetri. Si cerca di sapere a quale Misura, e lunghezza vecchia corrisponda. Per eseguirlo, poichè li 72 metri fanno 72000 millimetri, a questi uniti gli altri 325 millimetri, avremo la somma di 72325 millimetri. Indi poichè ogni Palmo è lungo 263 millimetri, perciò li 72325 millimetri divisi per 263, ci daranno per quoziente 275 palmi, che sono 3 catene, 9 passi, e 2 palmi, e questa è la Misura vecchia corrispondente alla data misura nuova.

La Riduzione fin qui esposta ci conduce al calcolo de' Metri, e sue suddivisioni decimali.

1. *Sommare i Metri, ed i loro Decimali.* Sieno due quantità, A di 8 metri, 2 decimetri, 0 centimetri, e 526 millimetri, o sieno 8 metri, 7 decimetri 2 centimetri, e 6 millimetri; e sia B di 6 metri, 1 decimetro, 8 centimetri, e 740 millimetri, o sieno 6 metri, 9 decimetri, e 2 centi-

metri da sommarsi insieme. Si dispongano i dati in modo, che i metri si corrispondano l' un sotto l' altro; lo stesso si faccia per i decimetri, per i centimetri, e per i millimetri. Disposta così ogni cosa, si sommino prima i millimetri, i quali si trovano 6, e si notino: indi si sommino i centimetri, i quali si trovano 4, e si notino; di poi si sommino i decimetri, i quali si trovano 16, e perchè questi valgono un metro, e 6 decimetri, perciò si notino 6 decimetri, e si riporta 1 metro, il quale unito agli altri, avremo la somma di 15 metri, 6 decimetri, 4 centimetri, e 6 millimetri; o sia 1 decametro, 5 metri, 6 decimetri, 4 centimetri, e 6 millimetri.

2. *Sottrarre i Metri, ed i loro Decimali.* Dalla quantità di 25 metri, 1 decimetro, 2 centimetri, e 2 millimetri si debba sottrarre la quantità di 12 metri, 4 decimetri, 1 centimetro, e 4 millimetri. Si dispongano le quantità secondo il di loro ordine in maniera che si corrispondano i metri, i decimetri, i centimetri, ed i millimetri. Indi si viene alla operazione. Poichè da 2 millimetri non si possono sottrarre 4 millimetri, perciò li 2 millimetri si crescano di 1 centimetro, che già sono 10 millimetri, ed avremo 12 millimetri, da' quali tolto via 4 millimetri, si noti il residuo 8 millimetri. Inoltre essendo restato 1 centimetro, da questo tolto via anche 1 centimetro, si noti 0. Di poi da 1 decimetro non potendosi sottrarre 4 decimetri, si prenda 1 metro, che già sono 10 decimetri, ed avremo 11 decimetri, da' quali tolto via 4 decimetri, si noti il residuo 7 decimetri. Finalmente da 25 metri essendone stato tolto 1, perciò sono restati 22 metri, da' quali sottratti 12 metri, si noti il residuo 10, e così avremo il residuo totale di 10 metri, 7 decimetri, 0 centimetri, e 8 millimetri.

3. *Moltiplicare i Metri, ed i di loro Decimali.* Sieno 7 metri, 1 decimetro, 3 centimetri, ed 8 millimetri da moltiplicarsi per 8. Poichè 8 millimetri moltiplicati per 8 fanno 64 millimetri, i quali sono 6 centimetri, e 4 millimetri, perciò i 4 millimetri si notino, e si riportano 6 centimetri. Inoltre moltiplicando 3 centimetri per 8, si avranno 24 centimetri a' quali uniti i 6 di riporto, si avranno 30 centimetri, e poichè questi sono 3 decimetri, perciò si notino, e si riportano 3 decimetri. Dippiù moltiplicando 1 decimetro per 8, avremo 8, al quale numero uniti i 3 di riporto, si avranno 11 decimetri, i quali sono 1 metro, e si noti so-

lamente 1 decimetro. Finalmente moltiplicando 7 metri per 8 si avranno 56, a' quali unito 1 metro di riporto, avremo lo intero prodotto di 57 metri, 1 decimetro, 0 centimetro, e 4 millimetri.

4. *Dividere i Metri, ed i di loro Decimali.* Sia la quantità di 57 metri, 1 decimetro, 0 centimetro, e 4 millimetri da dividersi per 8. Per eseguirlo si farà così. Poichè 8 entra in 57 metri per 7 volte, perciò si noti nel quoziente 7 metri, e da 57 ne avanza 1 metro, il quale essendo 10 decimetri, a questi si unisca 1 decimetro del dividendo, e si avranno 11 decimetri, i quali divisi per 8, daranno nel quoziente 1 decimetro, e ci avanzano 3 decimetri, i quali sono 30 centimetri, ed i quali divisi per 8 daranno nel quoziente 3 centimetri, e ci avanzano 6 centimetri, i quali essendo 60 millimetri, a' quali uniti i 4 millimetri del dividendo, si avranno 64 millimetri, i quali divisi per 8 daranno nel quoziente 8 millimetri, e perciò tutto il quoziente sarà 7 metri, 1 decimetro, 3 centimetri, ed 8 millimetri.

Dopo di avere esposto il rapporto tra le Misure vecchie di lunghezza colle Misure nuove anche di lunghezza, e di avere data la pratica delle quattro operazioni pel calcolo delle Misure nuove, egli è uopo di esporre il calcolo delle *Quadrature* delle medesime Misure nuove, o sia degli spazi delle superficie. Ma prima di venire a tutto questo meccanismo, egli è necessario di ricordarsi del valore delle *Quadrature* delle Misure passate per poterle poi paragonare col valore delle Misure nuove, e conoscerne il di loro rapporto.

Le Misure passate avevano il *Palmo*, dal quale si componevano tutte le Misure maggiori. Quindi il *Palmo*, ridotto in quadrato, contiene 144 *Pollici Quadrati*. Il *Passo* lungo 7 palmi, ridotto in quadrato, contiene 49 palmi quadrati. La *Canna* lunga 8 palmi, ridotta in quadrato, contiene 64 palmi quadrati. La *Catena* è lunga 10 passi, o sieno 70 palmi, e perciò la sua quadratura è di 100 passi quadrati, o pure 4900 palmi quadrati. La *Versura* è lunga 6 Catene, o sieno 60 passi, ovvero 420 palmi, e perciò la *Versura Quadrata* contiene 36 catene quadrate, ovvero 3600 passi quadrati, ovvero 176 mila, e 400 palmi quadrati. Finalmente il *Carro* è una superficie quadrata, che contiene 20 versure quadrate, o sieno 720 catene quadrate, ovvero 72 mila passi quadrati, ovvero 3 milioni, e 528 mila palmi quadrati.

Il Metro, e le sue divisioni decimali si possono anche ridurre nelle di loro *Quadrature*, e quindi possiamo avere le *Quadrature* tanto della serie crescente, quanto della serie decrescente, ritrovandosi il metro nel punto di mezzo tra queste due serie di quantità. Le quadrature ascendenti, o sieno crescenti sono le seguenti. La lunghezza di 1 metro ridotto in quadratura si dice *Metro quadrato*, il quale contiene 100 decimetri quadrati, o sieno 10 mila centimetri quadrati, ovvero 1 milione di millimetri quadrati. Se sieno 2 metri, saranno *Due Metri quadrati*, e così sino a *Nove Metri quadrati*. Quando poi si prendesse una lunghezza di 10 metri, e si riducesse in quadratura, allora questa superficie si dice *Aro*. Adunque l'*Aro quadrato* contiene 100 metri quadrati ovvero 10 mila decimetri quadrati, ovvero 1 milione di centimetri quadrati, o sieno 100 milioni di millimetri quadrati.

Una superficie quadrata, che contenga 10 Ari quadrati si dice *Decaaro*, e quella, che ne contiene 100 Ari quadrati, si dice *Elloaro*; e quella che ne contenga 1000 di questi Ari quadrati, si dice *Chiloaro*; e finalmente quella, che ne contenga 10 mila Ari quadrati, si dice *Miriaro*. Le superficie poi decrescenti sono le seguenti. La decima parte dell'*Aro quadrato* si dice *Deciario*, che contiene 10 metri quadrati; quella che ne contenga la centesima parte, si dice *Centiario*, e che contiene 1 metro quadrato; e finalmente quella, che ne contenga la millesima parte, si dice *Milliario*, ed il quale contiene 100 mila millimetri quadrati.

Essendo il *Palmo* lungo 263 millimetri, o sia 2 decimetri, 6 centimetri, e 3 millimetri, perciò facendo il suo quadrato, con moltiplicare 263 millimetri per loro stessi, si avrà il *Palmo quadrato*, il quale contiene 69169 millimetri quadrati, che sono 6 decimetri quadrati, 91 centimetri quadrati, e 69 millimetri quadrati. Inoltre il *Passo* è lungo 7 palmi, e perciò il *Passoquadrato* contiene 49 palmi quadrati, che sono 3 milioni, 389 mila, 281 millimetri quadrati, ed i quali fanno 3 metri quadrati, 38 decimetri quadrati, 92 centimetri quadrati, ed 81 millimetri quadrati. La *Canna* è lunga 8 palmi, e perciò la *Canna quadrata* contiene 64 palmi quadrati, o sieno 4 milioni, 426 mila, 816 millimetri quadrati, che sono 4 metri quadrati, 42 decimetri quadrati, 68 centimetri quadrati, e 16 millimetri quadrati. La *Catena* è lunga 10 passi, e perciò

la *Catena quadrata* contiene 100 passi quadrati, o sieno 4900 palmi quadrati, che fanno 358 metri quadrati, 92 decimetri quadrati, e 81 centimetri quadrati, che sono 3 Ari, 38 metri quadrati, 92 decimetri quadrati, e 81 centimetri quadrati. La *Versura* essendo lunga 6 catene, o sieno 60 passi, ovvero 420 palmi, perciò la *Versura quadrata* contiene 36 catene quadrate, o sieno 3600 passi quadrati, ovvero 176 mila, e 400 palmi quadrati, che fanno 12 decaari, 20 ari, 1 metro quadrato, 41 decimetri quadrati, e 16 centimetri quadrati. Finalmente il carro è una superficie, che contiene 20 versure quadrate, che fanno 24 ettoari, 40 decaari, 28 metri quadrati, 23 decimetri quadrati, e 20 centimetri quadrati.

Dopo di aver conosciuto il valore in quadratura di tutte le serie delle misure vecchie, e nuove, egli è facile ora di saper valutare la misura vecchia con la nuova, e la misura nuova con la vecchia, come si osserva da' seguenti problemi.

1. *Data la quadratura di una misura vecchia, saperla valutare in Quadratura della misura nuova.* Qualunque sia la quadratura della data Misura vecchia, bisognerà indispensabilmente ridurla prima tutta a palmi quadrati. Indi si farà così. Sia una Quadratura di misura vecchia di 2 versure, ed 8 catene quadrate. Si cerca di sapere a quale quadratura della misura nuova corrisponda. Per saperlo, perchè 2 versure fanno 72 catene quadrate, le medesime unite alle altre 8, avremo 80 catene quadrate, le quali fanno 392 mila palmi quadrati; e poichè ogni palmo quadrato contiene 69169 millimetri quadrati, perciò i palmi quadrati 392 mila moltiplicati pel numero 69169 millimetri, daranno 27 mila 114 milioni, e 248 mila millimetri quadrati, i quali ridotti nelle specie maggiori fanno 2 decaari, 72 ari, 14 metri quadrati, 24 decimetri quadrati, ed 80 centimetri quadrati, e questa è la quadratura della misura nuova corrispondente alla data quadratura della misura vecchia.

Questa riduzione si fa così. Il lungo numero che rappresenta i millimetri quadrati di tutta la quadratura, incominciando da destra si separino a due a due le figure, e quindi le prime due indicano i millimetri quadrati, le seconde due indicano i centimetri quadrati, le seguenti due indicano i decimetri quadrati, le altre due indicano i metri quadrati,

le altre due gli ari quadrati; e le figure restanti indicano i decaari.

2. *Data la quadratura di una misura nuova, saperla valutare in quadratura della misura vecchia.* Qualunque sia la quadratura della misura nuova bisognerà ridurla tutta a millimetri quadrati. Indi si farà così. Sia una quadratura di misura nuova di 2 decaari, 71 ari, 14 metri quadrati, o sieno 27114 metri quadrati, 24 decimetri quadrati, ed 80 centimetri quadrati. Si cerca di sapere a quale quadratura di misura vecchia corrisponda. Per saperlo, i metri quadrati si riducono tutti a millimetri quadrati, che sono 27 mila 114 milioni di millimetri quadrati: indi li 24 decimetri quadrati ridotti a millimetri, sono 240000; finalmente gli 80 centimetri quadrati ridotti a millimetri sono altri 8000. Quindi tutta la data quadratura nuova ridotta interamente a millimetri quadrati, ascende a 27 mila 114 milioni, e 248 mila millimetri quadrati. Fatto questo, poichè un palmo quadrato contiene 69169 millimetri quadrati, perciò questo numero dividendo 27 mila 114 milioni 248 mila millimetri quadrati, darà per quoziente 392 mila palmi quadrati. E poichè 4900 palmi quadrati fanno una catena quadrata, perciò dividendo i 392 mila palmi quadrati per 4900, avremo per quoziente 80 catene quadrate, che sono 2 versure, ed 8 catene quadrate, e questa è la quadratura della misura vecchia corrispondente alla quadratura della misura nuova.

Dopo di aver conosciuto il rapporto tra le misure vecchie, e le misure nuove, dobbiamo ora eseguire il calcolo delle quattro operazioni per le quadrature delle misure nuove, e de' di loro decimali.

1. *Sommare le Quadrature metriche co' di loro decimali.* Sieno due quantità, A di 2 decaari, 57 ari, 36 metri quadrati, 28 decimetri quadrati, 36 centimetri quadrati, e 40 millimetri quadrati; e sia B di 3 decaari, 60 ari, 81 metri quadrati, 56 decimetri quadrati, 43 centimetri quadrati e 75 millimetri quadrati; e questi debbano sommarsi insieme. Si dispongano i dati in modo, che le quantità simili si corrispondano. Disposto poi così il calcolo, si sommino prima i millimetri, i quali si trovano 115, de' quali si notino 15, e si riportano 100, che sono 1 centimetro quadrato. Si sommino i centimetri quadrati, e col riporto di 1, si avrà 80, il quale si noti. Di poi si sommino i decimetri, e

si trovano 84 decimetri quadrati, i quali si notino. Indi si sommino i metri quadrati, e perchè si trovano 117, perciò si notino 17, e si riporta 1 aro. Si sommino gli ari col riporto di 1, e si trovano 118, per cui si notino 18 ari, e si riporta 1 decaaro. Si sommino i decaari con 1 di riporto, e si trovano 6 decaari. Quindi la intera somma sarà 6 decaari, 18 ari, 17 metri quadrati, 84 decimetri quadrati, 80 centimetri quadrati, e 15 millimetri quadrati.

2. *Sottrarre le quadrature metriche co' di loro decimali.* Dalla quantità di 46 metri quadrati, 23 decimetri quadrati, 35 centimetri quadrati, e 44 millimetri quadrati si debba sottrarre la quantità di 35 metri quadrati, 48 decimetri quadrati, 71 centimetri quadrati, e 54 millimetri quadrati. Si dispongano le quantità secondo il di loro ordine, ed indi si viene alla operazione. Poichè da 44 millimetri quadrati non si possono sottrarre 54 millimetri quadrati, perciò si cresca di 1 centinaro il primo numero, che si prende da' centimetri, ed avremo 144 millimetri quadrati, e da' quali toltovia 54 millimetri quadrati, si noti il residuo 90 millimetri quadrati. Inoltre li 35 centimetri quadrati sono restati 34, da' quali non potendosi sottrarre 71 centimetri quadrati, perciò si cresca di 1 centinaro preso da' decimetri, ed avremo 134 centimetri quadrati, e da' quali tolto via 71 centimetri quadrati, si noti il residuo 63 centimetri quadrati. Dippiù li 23 decimetri quadrati sono restati 22, da' quali non potendosi sottrarre 48 decimetri quadrati, perciò si cerca di 1 centimetro preso da 1 metro quadrato, ed avremo 122 decimetri quadrati, e da' quali tolto via 48 decimetri quadrati, si noti il residuo 74 decimetri quadrati. Finalmente il numero 46 di metri quadrati è restato 45, da' quali tolto via 35 metri quadrati, si noti il residuo 10, e così avremo il residuo totale di 10 metri quadrati, 74 decimetri quadrati, 63 centimetri quadrati, e 90 millimetri quadrati.

3. *Moltiplicare le quadrature metriche co' di loro decimali.* Sieno 9 metri quadrati, 83 decimetri quadrati, 64 centimetri quadrati, e 48 millimetri quadrati da moltiplicarsi per 8. Poichè 8 moltiplicando 48 millimetri quadrati, fanno 384, che sono 3 centimetri quadrati, ed 84 millimetri quadrati, perciò si notino 84, e si riportano 3 centimetri. Moltiplicando 64 centimetri quadrati per 8, ed uniti gli altri 3 di riporto, si avranno 515 centimetri quadrati, i quali

sono 5 decimetri quadrati, e restano 15 centimetri, i quali si notino e si riportano 5. Si moltiplichino 83 decimetri quadrati ed unendovi li 5 di riporto, si avranno 669 decimetri quadrati, i quali sono 6 metri quadrati, e 69 decimetri quadrati, i quali si notino, e si riportano 6 metri quadrati. Finalmente si moltiplichino 9 metri quadrati per 8, ed unendo a' medesimi li 6 di riporto, si avranno 78 metri quadrati, e perciò lo intero prodotto sarà 7 ari, 8 metri quadrati, o sieno 78 metri, 69 decimetri quadrati, 64 centimetri quadrati, e 48 millimetri quadrati.

4. *Dividere le quadrature metriche co' di loro decimali.* Sia la quantità di 78 metri quadrati, 69 decimetri quadrati, 15 centimetri quadrati, ed 84 millimetri quadrati, da dividersi per 8. Poichè 8 entra in 78 metri quadrati per 9 volte, perciò si noti nel quoziente 9 metri quadrati, e da 78 ne avanzano 6 metri quadrati, i quali già sono 600 decimetri quadrati, per cui unendovi gli altri 69 decimetri, avremo 669 decimetri quadrati, i quali divisi per 8 daranno per quoziente, 83 decimetri quadrati, e ci avanzano 5 decimetri quadrati, i quali essendo 500 centimetri quadrati, a' medesimi uniremo gli altri 15 centimetri, ed avremo 515 centimetri quadrati, i quali divisi per 8, daranno nel quoziente 64 centimetri quadrati, e ci avanzano 3 centimetri quadrati, i quali essendo 300 millimetri quadrati, a' medesimi uniremo gli altri 84 millimetri, ed avremo 384 millimetri quadrati, i quali divisi per 8 daranno nel quoziente 48 millimetri quadrati, e perciò lo intero quoziente sarà 9 metri quadrati, 83 decimetri quadrati, 64 centimetri quadrati, e 48 millimetri quadrati.

Le misure nuove finora espote si sono prese da un grado di latitudine, il quale si è conceputo diviso in 10 milioni di parti uguali, ognuna delle quali si è chiamata *Metro*, e dalle suddivisioni decimali del quale si sono formate le due serie delle quantità ascendenti, e discendenti.

CAPO IV.

GLI STRUMENTI

§. I.

Il Compasso.

Le misure lunghe, e quadrate, che abbiamo esposte, sono quelle, delle quali l'uso sarà frequentissimo. Veggiamo presentemente quali sieno gli strumenti, che ci serviranno indispensabilmente nella campagna, affinchè possiamo mettere in esecuzione ogni problema, che ci bisognerà colle misure descritte.

Lo strumento BAC, chiamato *Compasso agrimensorio*, Fig. 23 viene costruito di legno forte, e di tale lunghezza, che un uomo comodamente possa maneggiarlo all'impiedi. Gli estremi B, e C sono muniti di un grosso spuntone di ferro alquanto incurvato verso l'intiere diell'apertura, la quale deve essere precisamente di un passo, o sieno 7 palmi misurati da punta a punta, come BC. Ed acciocchè nel maneggiarsi non si allarghi, o si stringa, viene anche fermata l'apertura della traversa DE, munita con una vite. L'uso frequentissimo di questo strumento, per misurare le lunghezze, fa conoscere la sua preferenza sopra tutti gli altri, comechè sensibilmente difettosi. Intanto non si deve tacere, che il compasso anche porta de'suoi disordini. Imperciocchè dovendo misurare una lunghezza, può traviare dalla rettitudine; e di più siccome l'apertura deve essere precisamente di 7 palmi, così mettendolo in opera, se il terreno sia troppo umido, in questo caso, gli spuntoni si conficcano dentro terra, e lo spazio misurato per 7 palmi, sarà sempre un poco meno; se poi il terreno sia secco, e duro, questi spuntoni possono spesso sdrucchiolare, e si percorrerà uno spazio maggiore.

§. II.

Lo Squadro.

Questo strumento, chiamato *Squadro agrimensorio*, si costruisce così. Si faccia un cilindro vuoto di ottone AB alto Fig. 24

★

circa tre once, e largo circa un'oncia e mezza, e che sia chiuso nelle due basi circolari. Si facciano nella sua lunghezza quattro fessure capillari cogli estremi ingranditi, come DH, GN, EF, e la quarta corrispondente al di dietro; ma che però queste fessure sieno disposte à croce, in maniera, che le opposte si corrispondano esattamente non solo, ma che sieno distanti tra di loro per una semicirconferenza, e così tutte quattro si differenzieranno per un quarto di circonferenza. Di più, che le visuali, che per queste fessure si tramandano, si debbano incrocicchiare ad angoli retti nell'asse del cilindro. Queste quattro fessure longitudinali si chiamano *Linee de' Quadranti*, giacchè differiscono tra di loro per un quarto della circonferenza, e formano nell'asse del cilindro quattro angoli retti.

Inoltre negl'intervalli di queste linee de' quadranti, pigliando le precise metà, è solito di segnarvi altre fessure più corte, ma conformate nel modo istesso, e queste seconde fessure si dicono *Linee delle Diagonali*, come sono IK; LM, e le corrispondenti al di dietro. Ora queste linee delle diagonali, siccome differiscono tra di loro per un quarto di circonferenza, così differiranno dalle linee de' quadranti per un mezzo quadrante, o sia per un angolo semiretto. Questo cilindro, così preparato, si adatti sopra un bastone mediante la vite BC tanto in alto, quanto uu uomo all'impiedi possa comodamente osservare.

Lo squadra, così costruito, riesce adattatissimo per le operazioni da eseguirsi, ed è resistente a'disagi della campagna; ma niente impedisce però, che riflettendo sull'uso del medesimo non potriamo renderlo migliore. Egli è a considerarsi, che per quanto sottili sieno le fessure, quante volte si traguardi per le medesime, lo spazio veduto in lontano riesce sempre sensibilmente largo, per cui è difficile lo stabilire il preciso punto della direzione della stessa linea. Quindi in luogo di queste capillari fessure, si possono fare delle larghe aperture, almeno per le linee de' quadranti, e situare nel mezzo delle medesime de' fili sottilissimi, e disposti in modo, che s'intersechino ad angoli retti nell'asse del cilindro. In questa maniera traguardando una linea visuale, l'incontro de' due fili ci farà determinare precisamente il vero punto della direzione.

L'uso dello squadra agrimensorio egli è di determinare le linee visuali, e di formare gli angoli retti tra le visuali istesse.

se. Dopochè si è fermato a perpeudicolo lo squadra, si ponga l'occhio vicino ad una linea de'quadranti, e mediante la sua opposta corrispondente di dietro si traggardi un oggetto fisso lontanissimo; indi si adatti l'occhio a quella di dietro, e si traggardi con quella d'avanti un altro oggetto anche lontano. Fatto questo, egli è chiaro, che una linea, che unisce i due oggetti, passerebbe per l'asse dello squadra. Quindi ogni qualvolta si voglia fissare una linea tra due punti lontani, bisogna eseguire la descritta operazione collo squadra, e questa tale pratica si dice *Collineazione*.

Finalmente per la pratica esecuzione delle misure delle superficie, per lo più accade, che in una collineazione ne bisogna stabilire un'altra, che intersechi la prima ad angoli retti. Quindi mercè lo squadra, dopochè colle primie opposte due linee de' quadranti si sieno collineati due punti, e stabilita la linea retta tra i medesimi, senza muovere da terra lo strumento, si collineino, colle altre due opposte linee dei quadranti, due altri oggetti lontani, ed avremo un'altra linea tirata tra gli stessi, che interseca la prima nel centro dello strumento ad angoli retti. Ora sì fatta operazione si dice *Formar la Croce*, i di cui quattro lati sono li quadranti dello squadra.

Alle volte accade, che non solo ci bisognano nelle operazioni le linee visuali, le quali s'intersecano ad angoli retti, ma anche quelle, che s'intersecano ad angoli semiretti. Quindi per collineare sì fatte linee, noi ci serviremo delle linee delle diagonali già descritte nello strumento.

§. III.

La Bussola.

La *Bussola*, celeberrimo strumento, si compone così. Si formi la cassetta ACFE, per lo più di forma quadrata; indi due lati EF, AC si dividano, ciascuno per metà, e da' punti della divisione si segnino le verticali, come BD; dipoi si pongano i due traggardi B, e G, che esattamente corrispondano, colle di loro fessure, a' punti della divisione segnati sopra dei lati, in maniera, che la linea collineata per i due traggardi B, e G venga ad essere sempre parallela a' due lati EA, FC della cassetta. Fig. 25

Si formi di ottone un disco circolare BH, e si adatti nel

fondo della cassetta , affinchè poi tutto si possa coprire con un cristallo , rimanendoci uno spazio vuoto tra il disco , ed il cristallo. Di più sul disco si segni un diametro , che esattamente corrisponda alle fessure de' traguardi , tantochè collineando da B in G , la linea visuale cada esattamente sopra di questo diametro segnato. Un sì fatto diametro deve essere distinto nell'estremo G con un giglio , per dinotare il punto Nord , e l'altro estremo B sarà il Sud. Questo diametro così disposto , si dice *Meridiano del Disco*. Inoltre nel centro H si metta un perno , sopra del quale si equilibra una lancetta di acciaio calamitata , detta *Ago magnetico* , la quale rivolgendosi su questo perno , si volta colla sua punta sempre verso il Nord , o sia Settentrione. Finalmente dal punto Nord a destra , ed a sinistra si segnino sino al Sud 180° da una parte , e 180° dall'altra parte. Un disco così adorno , si dice *Rosa de' Venti* , o delle *Direzioni*.

Serve la bussola ad orientare le configurazioni , o sieno le piante , che si rilevano in campagna. Imperciocchè dirigendosi l'ago sempre verso il Nord , così noi , collineando colla visuale della bussola , un lato di una pianta , possiamo vedere se questo ago , o resti sul Meridiano del disco , o declini ad Est , o sia Levante , o declini ad Ovest , o sia Ponente , e così possono accadere tre casi diversi. In primo luogo si disponga il meridiano del disco nella medesima direzione di un lato della pianta , e fingiamo , che l'ago resti nella stessa direzione del meridiano del disco ; in questo caso , il lato della pianta collineato , sarà nella vera direzione di Nord , e Sud , o sia Settentrione , e Mezzogiorno ; per cui nella medesima direzione lo tireremo sulla carta , intorno al quale gli altri lati si disporranno a proporzione. In secondo luogo , se dopo di aver tutto disposto accadesse , che l'ago declini verso Est del meridiano del disco , in questo secondo caso , il lato collineato sarà declinante dalla direzione dell' ago verso Ovest della quantità segnata nella circonferenza del disco , secondo la quale si disponga poi il disegno. In terzo luogo finalmente , se l'ago declinerà ad Ovest del meridiano del disco , in questo terzo caso , il lato della figura declinerà ad Est della direzione dell' ago , e misurata questa declinazione sulla circonferenza , si opri a proporzione nel formare il disegno della pianta.

Felicitissima sarebbe questa pratica della orientazione , qualora sempre accadesse , che l'ago magnetico si dirigesse esat-

tamente verso il punto di Nord , e di Sud; ma il fatto succede tutto altrimenti. Si è saputo da molte osservazioni fatte in diversi luoghi della Terra, che l'ago magnetico declina o verso Est, o verso Ovest, della vera direzione del Polo arctico, o sia Nord , e Sud , con una quantità variabile eziandio in tempi diversi nel medesimo luogo. Questa irregolare declinazione, detta da noi *Variazione*, non essendo soggetta a legge costante, ed a calcolo , si dovrà conoscere mercè la seguente operazione.

Si scelga un piano liscio , ed uguale parallelo all' Orizzonte; e si descriva una circonferenza , nel di cui centro si ponga a perpendicolo un' asta sottile , e diritta. Quando il Sole è dalla parte orientale, l'ombra dell'asta si allunga verso Occidente, ed alzandosi il Sole, l'ombra si va accorciando, finchè la sua punta tocchi la circonferenza segnata, e si noti questo punto occidentale. Passando poi il Sole verso Occidente, l'ombra principierà ad allungarsi verso Oriente , e quando tocca la circonferenza descritta , si segni il punto orientale. Finalmente tra i due punti notati si tiri una linea, e si divida per mezzo esattamente, e poi da questo punto di mezzo sino al centro della circonferenza, si tiri una linea retta, la quale distesa dall'una, e dall'altra parte, la medesima sarà la linea meridiana , che si dirige esattamente da un Polo all'altro, e che noi chiamiamo *Meridiana vera*, o sia *Linea Nord e Sud*.

Ritrovata la vera meridiana , per conoscere la variazione dell'ago magnetico, si faccia così. Si ponga la Bussola sopra di questa meridiana in modo, che la visuale de' traguardi, e con essa il meridiano del disco corrisponda esattamente alla medesima. Fatto questo, si osservi la variazione dell'ago, e si noti per servirsene ne' casi occorrenti.

Questa variazione, così conosciuta, deve entrare nel calcolo della orientazione. Ed acciocchè i problemi di questa specie si risolvano con tutta la precisione, stimiamo necessaria cosa di esporre tutti i casi possibili generali, in cui la variazione può a noi mostrarsi, la quale potendo essere, o all' Est, o all' Ovest della vera meridiana, così distingueremo due variazioni, in ciascuna delle quali vi sono sette casi generali. Intanto supponiamo, che la variazione sia di 10° , e che la linea grossamente segnata significa il meridiano del disco; la linea punteggiata rappresenta l' ago magnetico; e la linea NS mostra la vera meridiana, o sia la linea Nord, o Sud. Sia adun-

que la variazione di 10° ad Est. In questo vi sono sette casi.

Fig. 25 1. *L'Ago situato sul meridiano del disco.* Poichè la variazione è ad Est di 10° , perciò la linea NS deve essere 10° all'Ouest del meridiano del disco, che rappresenta un lato collineato della pianta. Quindi per orientarlo, deve essere il medesimo all'Est della vera meridiana per un'angolo di 10° , come è chiaro a capirsi.

2. *L'Ago situato all'Ouest del meridiano del disco per quanto è la sua variazione.* Poichè la variazione è di 10° all'Est, perciò la linea NS deve essere 20° all'Ouest del meridiano del disco; giacchè 10° di declinazione Ouest, e 10° di variazione, fanno 20° ; donde nasce, che il lato della figura, rappresentato dal meridiano del disco, deve essere 20° all'Est della vera meridiana.

3. *L'Ago situato ad Est del meridiano del disco per quanto è la sua variazione.* Poichè la variazione è di 10° all'Est, perciò la linea NS deve essere nella situazione del meridiano del disco; giacchè 10° di variazione Est, e 10° di declinazione per lo stesso verso si sottraggono tra di loro. Quindi nasce, che il lato orientato deve essere nello stesso luogo della vera meridiana.

4. *L'Ago situato all'Ouest del meridiano del disco per una quantità minore della sua variazione, come 5° .* Poichè la variazione è di 10° all'Est, perciò la linea NS deve essere 15° all'Ouest del meridiano del disco; poichè 10° di variazione, e 5° di declinazione Ouest fanno 15° . Quindi avviene, che il lato orientato deve essere 15° all'Est della vera meridiana.

5. *L'Ago situato all'Est del meridiano del disco per una quantità minore della sua variazione, come 5° .* Poichè la variazione è di 10° all'Est, perciò la linea NS deve essere 5° all'Ouest del meridiano del disco; poichè da 10° di variazione Est, sottratti 5° di declinazione Est, il residuo è 5° ; donde avviene, che il lato orientato deve essere 5° all'Est della vera meridiana.

6. *L'Ago situato all'Ouest del meridiano del disco per una quantità maggiore della sua variazione, come 15° .* Poichè la variazione è di 10° all'Est, perciò la linea NS deve essere 25° all'Ouest del meridiano del disco; giacchè 15° di declinazione Ouest, e 10° di variazione Est, fanno 25° ; donde nasce, che il lato orientato deve essere 25° all'Est della vera meridiana.

7. *L' Ago situato all' Est del meridiano del disco per una quantità maggiore della sua variazione, come 15°.* Poichè la variazione è di 10° all'Est, perciò la linea NS deve essere 5° all'Est del meridiano del disco; poichè da 15° di declinazione Est sottratti 10° di variazione Est, il residuo è 5°. Quindi il lato orientato deve essere 5° all'Ouest della vera meridiana.

Sia in secondo luogo la variazione di 10° ad Ouest. In questa possono darsi anche sette casi.

1. *L' Ago situato sul meridiano del disco* Poichè la variazione è di 10° all'Ouest, perciò la linea NS deve essere 10° all'Est del meridiano di disco. Quindi il lato collineato deve essere 10° all'Ouest della vera meridiana.

2. *L' Ago situato all' Est del meridiano del disco per quanto è la sua variazione.* Poichè la variazione è di 10° all'Ouest, perciò la linea NS deve essere 20° all'Est del meridiano del disco; giacchè 10° di variazione Ouest, e 10° di declinazione fanno 20°; donde nasce, che il lato orientato deve essere 20° all'Ouest della vera meridiana.

3. *L' Ago situato all' Ouest del meridiano del disco per quanto è la sua variazione.* Poichè la variazione è di 10° all'Ouest, perciò la linea NS deve essere nello stesso meridiano del disco; giacchè 10° di variazione Ouest, e 10° di declinazione, anche Ouest, si sottraggono tra di loro; quindi nasce, che il lato orientato deve essere nello stesso meridiano del disco.

4. *L' Ago situato all' Est del meridiano del disco per una quantità minore della sua variazione, come 5°.* Poichè la variazione è di 10° all'Ouest, perciò la linea NS deve essere per 15° all'Est del meridiano del disco; perchè 5° di declinazione Est, e 10° di variazione Ouest, fanno 15°; donde avviene, che il lato orientato deve essere per un angolo di 15° all'Ouest della vera meridiana.

5. *L' Ago situato all' Ouest del meridiano del disco per una quantità minore della sua variazione, come 5°.* Poichè la variazione è di 10° all'Ouest, e la declinazione è di 5°, anche Ouest, perciò la linea NS deve essere per 5° all'Est del meridiano del disco; poichè 5° sottratto da 10°, il residuo è 5°. Quindi nasce, che il lato orientato deve essere per 5° all'Ouest della vera meridiana.

6. *L' Ago situato all' Est del meridiano del disco per una quantità maggiore della sua variazione, come 15°.*

Poichè la variazione è di 10° all'Ouest, e la declinazione è di 15° ad Est, perciò la linea NS deve essere 25° di declinazione Est, giacchè 15° di declinazione Est e 10° di variazione Ouest, fanno 25° ; donde nasce, che il lato orientato deve essere 25° all'Ouest della vera meridiana.

7. *L'Ago situato all'Ouest del meridiano del disco per una quantità maggiore della sua variazione, come 15° .* Poichè la variazione è di 10° all'Ouest, e la declinazione è di 15° anche Ouest dal meridiano del disco, perciò la linea NS deve essere 5° all'Ouest del meridiano del disco; giacchè da 15° di declinazione Ouest, sottratti 10° di variazione anche Ouest, il residuo è 5° ; donde avviene, che il lato orientato deve essere 5° all'Est della vera meridiana.

Dalla esposta teoria di tutti i casi generali possibili della variazione della Bussola, noi ne tiriamo la conseguenza, che quando accade, che i due termini sieno simili come Est, ed Est, ovvero Ouest, ed Ouest, allora si sottraggono; ma quando sieno dissimili, come Est, ed Ouest, ovvero Ouest, ed Est, allora si sommano. Ben inteso tutto questo, veniamo alla risoluzione del seguente problema.

Data la variazione di 10° ad Est, e la declinazione dell'Ago di 7° all'Ouest del meridiano del disco, si cerca la vera situazione del lato collineato colla vera meridiana. Per risolvere questo problema, si dica così. Poichè la variazione è di 10° all'Est, e la declinazione è di 7° all'Ouest del meridiano del disco, e perchè i termini sono dissimili, perciò sommeremo 10° , e 7° , che fanno 17° , per cui la vera meridiana NS dovrà situarsi ad Ouest del meridiano del disco per un angolo di 17° , ed in conseguenza il lato collineato dovrà situarsi per la stessa quantità all'Est della vera meridiana.

In seguito di tutto questo, che abbiamo descritto pel maneggio della Bussola, possiamo essere nel caso di risolvere ogni problema, che occorrerà per la orientazione di ogni pianta, che si rileva cogli enunciati strumenti nella campagna.

CAPO V.

LA LONGIMETRIA

§. I.

Le Linee calcolabili.

Poichè tutte le pratiche operazioni, che saremo per esporre, debbono sempre incominciare dalla conoscenza, e dalla misura delle lunghezze, perciò questa parte, chiamata *longimetria*, ella è non solo necessaria, ma deve altresì premettersi a tutte le altre. Le lunghezze, che a noi bisognano, sono le sole linee orizzontali, e che noi misureremo coll' aiuto degli strumenti descritti, e colle misure enunciate, ed esamineremo in primo luogo le *linee calcolabili*, che sono quelle, che col semplice calcolo si possono conoscere, e che spianano la strada per determinare in secondo luogo le *linee misurabili*, le quali si debbono sapere mercè quelle operazioni eseguite nella campagna, che saremo per descrivere.

1. *Data la lunghezza di due lati di un Triangolo rettangolo, ritrovare la lunghezza del terzo lato.* Per la risoluzione di questo problema, due casi possono accadere nel triangolo rettangolo. Il primo, se si diano i due cateti, e si cerchi l'ipotenusa: Il secondo, se si dia l'ipotenusa, ed un cateto, e si cerchi l'altro cateto.

Sia dunque, per primo caso, il triangolo ABC rettangolo Fig. 27 in B, e sieno le lunghezze de' due cateti AB di 68, e BC di 113. Si cerca anche in numeri la lunghezza della ipotenusa AC. Per ritrovarla, i due cateti 68, e 113 si quadrino, e si avrà pel primo 4624, e pel secondo 12769. Questi due quadrati, sommati insieme, fanno 17393, che rappresenta il quadrato della ipotenusa, per cui, estratta la radice quadrata $131\frac{1}{2}$, questa sarà la lunghezza della ipotenusa AC, che si cercava.

Per riguardo al secondo caso, sia il cateto BA di 10, e l'ipotenusa AC di 24. Si cerca anche in numeri la lunghezza dell' altro cateto BC. Per ritrovarla, si quadri il cateto BA, ed avremo 100, e si quadri l'ipotenusa AC, ed avremo 576. Dal quadrato 576 della ipotenusa si sottragga il quadrato 100 del cateto BA, ed il residuo 476 esprimerà il

quadrato dell' altro cateto BC, dal quale estratta la radice quadrata, che sarà $21 \frac{1}{3}$, la medesima esprimerà la lunghezza del cateto richiesto.

2. *Data la lunghezza di due lati di un Triangolo acutangolo, ritrovare la lunghezza del terzo lato.* Poichè la proporzione de' quadrati fatti sopra de' lati di un triangolo acutangolo non è, come quella de' triangoli rettangoli, perciò la risoluzione di questo problema richiede altro apparecchio. Ogni triangolo acutangolo si risolve in due triangoli rettangoli mercè una perpendicolare, che si tira sempre dentro del triangolo, incominciando da un angolo sino sopra il lato noto più lungo; ed in questo modo avremo la spedita esecuzione del problema.

Fig. 28 Sia il triangolo acutangolo ABC, del quale si sappiano due lati BA di 12, e BC di 15, e si cerca il terzo lato AC. Per conoscerlo, dal vertice A si tiri, sul lato noto più lungo, la perpendicolare AF, che divida il lato noto BC in due parti, delle quali BF sia 10, ed FC di 5. Mediante questa perpendicolare tirata, il triangolo dato, resta diviso in due triangoli rettangoli. Quindi nel triangolo rettangolo ABF, si ha l'ipotenusa BA di 12, ed il cateto BF di 10, si cerchi l'altro cateto, o sia la perpendicolare AF, la quale, fatto il calcolo, si trova $6 \frac{2}{3}$, o all'ingrosso 7. Ora nell'altro triangolo rettangolo AFC si è calcolata la perpendicolare, o sia cateto AF di 7, e sapendosi l'altro cateto residuo FC di 5, si avrà, facendo il calcolo, l'ipotenusa AC di $8 \frac{1}{3}$, o sia il terzo lato del proposto triangolo acutangolo.

3. *Data la lunghezza di due lati di un Triangolo ottusangolo, ritrovare la lunghezza del terzo lato.* Ciocchè si è detto de' triangoli acutangoli, lo stesso è da dirsi pe' triangoli ottusangoli, giacchè i quadrati fatti sopra dei suoi lati non hanno quella proporzione fra di loro, come accade ne' triangoli rettangoli. Per risolvere adunque questo problema, egli è a sapersi, che ogni triangolo ottusangolo si riduce a triangolo rettangolo, mediante la perpendicolare, che si tira o dentro, o fuori del medesimo, siccome porta l'occasione, ed in questo modo si opera sicuramente. Intanto due casi possono accadere, o che i due lati noti sono quelli, che compongono un angolo acuto, ed in questo caso la perpendicolare cade dentro del triangolo; o i due lati noti sono quelli, che compongono l'angolo ottuso, ed in questo caso la perpendicolare cade fuori del triangolo.

Sia per primo caso il triangolo ABC ottusangolo in B, Fig. 29 di cui si sappia il lato AB di 10, ed il lato AC di 36, che compongono l'angolo acuto A, si cerca il terzo lato BC. Per ritrovare questo terzo lato, si faccia così. Dall'angolo ottuso B si meni la perpendicolare BD sopra del più lungo lato noto AC, e colla medesima, tutto il triangolo ottusangolo verrà diviso in due triangoli rettangoli. Dipoi si misuri AD, che è una parte del lato noto, compresa tra l'estremo A, e la perpendicolare tirata, e sia 6. Ora nel triangolo rettangolo BAD, abbiamo l'ipotenusa AB di 10, ed un cateto AD di 6. Facendo il calcolo, ritroveremo l'altro cateto BD di 8. Inoltre abbiamo BD ritrovato 8, ed il residuo di tutto il lato noto DC di 30. E poichè il triangolo BDC è rettangolo, di cui sappiamo i cateti BD di 8, e DC di 30, perciò facendo il solito calcolo, ritroveremo l'ipotenusa, o sia il terzo lato BC di $31\frac{1}{2}$, corrispondente agli altri due lati del triangolo ottusangolo, che si era proposto.

Sia per secondo caso il triangolo EFG ottusangolo in F, di cui si sappiano i due lati FE di 15; ed FG di 8, che compongono l'angolo ottuso, e si cerca il terzo lato EG. Poichè la perpendicolare non può cadere dentro del triangolo sopra di un lato noto, ma deve cadere fuori, perciò uno dei lati noti, come GF si prolunghi in diretto verso H tanto, finchè si unisca colla perpendicolare EH, tirata dall'estremo dell'altro lato noto, ed avremo così un triangolo rettangolo EHF, di cui sappiamo l'ipotenusa EF di 15, e misurando poi FH, e sia di 5, avremo ancora questo cateto HF. Quindi nel triangolo rettangolo EHF, sapendo l'ipotenusa EF di 15, il cateto HF di 5, facendo il calcolo, ritroveremo l'altro cateto EH di $14\frac{1}{2}$, ovvero 14. Fatto questo, nel triangolo rettangolo EHG si conoscerà il cateto EH di 14, tutto il cateto HG di 13, per cui sarà facile trovare l'ipotenusa EG. Fatto il calcolo, la ritroveremo di $19\frac{1}{3}$, e questo sarà il terzo lato del triangolo ottusangolo, che si voleva.

4. Se in un Triangolo rettangolo da un punto di un suo cateto si tiri una parallela all'altro cateto, allora il primo cateto sarà diviso in due parti comunque, per cui conosciute in misure queste due parti, e la parallela tirata, si cerca di calcolare l'altro cateto. Questo importantissimo problema s'intende così. Sia il triangolo ABC rettangolo in B. Nel cateto AB si prenda un punto D ad ar-

Fig. 30

bitrio, e da questo si tiri DE parallela all' altro cateto BC. Questa parallela taglia il primo cateto in due porzioni comunque AD, DB. Ora se si sappiano in misure queste due parti AD, DB, e la parallela DE, sarà facile calcolare l'altro cateto BC. Per calcolarlo, si faccia così. Sia AD di 43, DB di 16, e DE di 36. Si dica dunque, come AD di 43 sta a DE di 36, così tutto AB di 59 a BC, che si cerca. Fatta dunque la regola del tre, ritroveremo BC di $49 \frac{1}{11}$. Questa tale operazione si dice *Regola del Tre*, come la diremo sempre in appresso.

Avvertasi in questo luogo, che la esposta proporzione delle tre linee conosciute, in seguito delle quali abbiamo calcolata la quarta incognita, mediante la regola del tre, col medesimo artificio si può applicare ad ogni altra specie di triangoli, sieno acutangoli, sieno ottusangoli, quando da un punto di un lato si tiri una parallela ad un altro lato.

§. II.

Le Linee misurabili.

I problemi delle linee calcolabili, finora esposti, servono per farci essere speditissimi nella risoluzione di quelle pratiche, che attualmente enunciamo, per potere con ogni facilità, e sicurezza determinare tutte le *Linee misurabili*, e delle quali le *accessibili* si misureranno effettivamente cogli strumenti agrimensori, e quelle poi, che sono *inaccessibili* si conosceranno con altri speciosi artifici, che noi esporremo.

1. *Misurare una linea da per tutto accessibile.* Sebbene questo semplicissimo problema sia di facile esecuzione, per tuttavia noi ne distinguiamo tre casi diversi.

Fig. 31 Sia per primo caso da misurarsi la linea BA non solo interamente accessibile, ma benanche interamente visibile dall'estremo B sino all'estremo A. Per eseguire questa pratica si faccia così. Nell'estremo B si ponga lo squadro, di cui con una linea visuale de' suoi quadranti si collinei l'altro estremo A, e tutta la linea AB per conseguenza si vedrà nella stessa visuale dello squadro. Per maggior sicurezza, oltre dell'estremo A, si traguardi un punto lontanissimo, e distinto, come D, che sia nella stessa direzione della linea BA, corrispondente in diretto all'estremo A. Non movendo lo

squadro in B si traguardi dall'altra sua parte nella stessa visuale de' quadranti, affinchè si determini nella parte opposta un altro punto lontano, e distinto, come C. Determinati collo squadro questi due punti di vista lontani, che diremo *Segni*, sempre in appresso, e che debbano stare nella stessa direzione della linea BA, si prenda il compasso, la di cui apertura sia precisamente di un passo, e s'incominci dal punto B a percorrere la linea, guardando sempre il segno D, e numerando i passi del cammino. Arrivato in A si fissi lo squadro, e colla stessa linea visuale de' quadranti si traguardi di nuovo la linea misurata, osservandola nella stessa visuale dall'estremo A sino a B; e vedendo di più, che nella medesima visuale dello squadro corrispondono nel modo istesso i due segni D, e C, allora saremo sicuri, che si sia con esattezza operato.

Sia per secondo caso da misurarsi la linea BA, la quale Fig. 5a sebbene sia tutta accessibile, pure dall'estremo B non è visibile l'estremo A per cagione di una collina EDF, che ne occulta la veduta. Per misurare si fatta linea faremo così. Si ponga in B lo squadro, e con una sua linea visuale dei quadranti si traguardi la linea BF, collineando nel tempo stesso un segno più lontano visibile nella sommità D da una parte, e poi dall'altra parte dello squadro B, l'altro segno lontano verso C. Fatto questo, saremo sicuri, che la linea da misurarsi sia nella direzione de' segni, sebbene non si veggia l'estremo A. Finito questo apparecchio, dovremo col compasso incominciare la misura. Ora in queste circostanze, due casi possono accadere, o che l'operatore sia solo col suo squadro, o che vi sia il secondo operatore anche col suo squadro.

Se l'operatore sia solo col suo squadro, allora togliendo da B lo strumento, lascerà ivi un oggetto distintamente visibile, e col compasso misurerà la linea sino ad F. Giunto quì, fisserà lo squadro, e colla stessa linea visuale riconoscerà l'oggetto lasciato in B, ed i due segni lontani di C, e di D. Indi si toglie lo squadro da F, e si lascia ivi un altro oggetto distinto, e portando sempre in vista il segno D, percorrerà col compasso la linea inclinata FD. Arrivato in D, fisserà lo squadro, e colla linea visuale de' quadranti, riconoscerà l'oggetto lasciato in F, in B, ed il segno lontano C, e poi traguardando dall'altra parte dello squadro, dovrà ritrovare nella stessa direzione della visuale, l'altro c-

stremo A della linea, in direzione del quale prenderà un altro segno lontano G. Dunque sulla sommità D si deve ritrovare nella visuale dello squadro tutta la linea da misurarsi, e che sia nella direzione de' due segni C, e G. Fatto questo, dovendosi percorrere l'altra linea inclinata DE, si traggua di colla visuale dello squadro il punto E nella stessa direzione dell'estremo A, e del segno lontano G; indi tolto da D lo strumento, e lasciato ivi un oggetto distinto, si misuri col compasso la linea inclinata DE. Giunto in E si fissi lo squadro, e colla solita visuale, si traggua di il segno D da una parte, e poi dall'altra parte l'estremo A, ed il segno lontano G. Di poi si tolga lo squadro da E, ed ivi si lasci un oggetto distinto, e si misuri EA. Arrivato finalmente in A, ultimo estremo della linea da misurarsi, si ponga lo squadro, e colla stessa visuale, si riconosca da una parte l'oggetto E, ed il segno D, e dall'altra parte, il segno lontano G, e ritrovando, che sieno nella stessa direzione della linea visuale dello squadro, saremo sicuri della esattezza dell'operazione. Ora il descritto meccanismo, col quale si conduce nella stessa direzione una linea, si dice *Portare a Squadro una linea*.

Se poi vi siano due operatori ciascuno col suo squadro, allora si farà così. Dopo di aver posto il primo squadro in B, con una sua linea visuale si traggua di da una parte il punto F della linea, ed un segno D sulla sommità, che sia nella stessa direzione, e poi dall'altra parte, un segno lontano C. Indi non movendo da B lo strumento, il secondo squadro vada in F; ed affinché questo secondo squadro si ponga nella stessa direzione de' segni C, e D, l'operatore di B traggua di colla visuale del suo squadro, l'altro operatore in F, per farlo situare esattamente, o sia per farlo portare a squadro la linea, gli farà segnale, ora a destra, ed ora a sinistra, finchè questo secondo si trovi nella visuale dello squadro di B. Fatto il segnale da B, che l'operatore F si trovi nella direzione della visuale del primo, questo secondo F fisserà il suo squadro, e nella sua linea visuale dovrà ritrovare lo squadro B col segno C da una parte, e poi dall'altra parte, l'altro segno D, se gli sia visibile, e così disporrà il suo strumento, che la sua linea visuale sia tra i segni C, e D. Eseguito tutto questo, l'operatore F farà segnale a B di stare a dovere, per cui l'operatore B toglie lo squadro, e col compasso percorre la linea BF. Arrivato in F, il

secondo operatore, che quivi si trova, non si muove col suo squadra, ma il primo, che ha percorsa la linea BF, andrà a situarsi in D. Ed affinchè questi si metta nella stessa direzione della visuale dello squadra F, bisognerà, che l'operatore di F gli faccia segnale, ora a destra, ed ora a sinistra, finchè lo squadra di D si trovi nella visuale dello squadra di F. Fatto il segnale da F, che l'operatore D si trovi nella visuale di F, allora D fisserà il suo squadra, e colla sua visuale dovrà traguardare lo squadra F, ed il segno C, acciò la linea DFB sia nella sua direzione; e poi dall'altra parte traguarderà, il punto E, l'estremo A, ed un segno lontano G, nella stessa direzione. Quindi nel vertice D della collina si deve ritrovare nella visuale dello squadra l'intera linea da misurarsi, la quale deve essere nella direzione de' segni C, e G. Fatto questo, allora l'operatore D farà segnale ad F di stare a dovere. Ridotta così l'operazione, lo squadra in D resta fisso, mentrechè lo squadra F si toglie, e col compasso misurerà la linea inclinata FD. Arrivato in D, l'operatore scenderà in E, e per vedere, se stia nella richiesta direzione della visuale di D, questo operatore col traguardare gli farà segnale, ora a destra, ed ora a sinistra, finchè lo squadra E resti nella visuale di D. Determinato questo, e fatto il segnale da D, che l'operatore E si trovi nella visuale di D, allora E fisserà il suo squadra, e colla sua visuale deve traguardare lo squadra D da una parte, e poi dall'altra parte, traguarderà l'estremo A, ed il segno lontano G, e se questi secondi oggetti si trovano nella stessa visuale, allora la linea portata a squadra è stata ben diretta. Eseguito questo, l'operatore E farà segnale a D di stare a dovere; per cui l'operatore D toglie lo squadra, lascia ivi un oggetto distinto, e col compasso misura la linea inclinata DE. Non movendosi lo squadra E, ma l'altro, che ha percorsa la linea DE, andrà nell'estremo A. Ed acciocchè questo si metta nella stessa direzione della visuale dello squadra E, egli è mestieri, che l'operatore di E gli dia segnale, ora a destra, ed ora a sinistra, finchè lo squadra A si sia posto nella direzione della visuale dello squadra E. Fatto il segnale da E, che l'operatore A stia nella sua direzione, allora A fisserà il suo squadra, e colla sua linea visuale de' quadranti dovrà collineare lo squadra E, ed il segno D, per fare, che la linea AED stia nella sua direzione; e poi dall'altra parte dovrà ritrovare nella stessa visuale l'altro segno lontano G;

e qualora così ritrovasse, si è sicuro di aver bene operato. Dopo questo, l'operatore A darà segnale ad E di stare a dovere; per cui l'operatore E togliendo lo squadro, misurerà col compasso la linea EA, e così sarà terminata la conoscenza della linea, che si cercava di sapere, e misurare. Avvertasi finalmente, che la funzione, che si fa dal secondo operatore per incontrare la visuale del primo, si dice *mettersi a Squadro*, come diremo sempre in appresso.

Fig. 33 Sia per terzo caso da misurarsi la linea ABC, la quale sebbene sia tutta accessibile, ella però scorre per la profondità di una valle, e ciò non ostante dal vertice A si vegga il punto infimo B, e l'altro termine C posto in alto. Per eseguir tutto questo, anche due casi possono darsi, o che l'operatore sia solo col suo squadro, o vi sia un secondo operatore anche col suo squadro.

Quando vi sia un solo squadro, si farà così. Si fermi lo squadro in A, e con una linea de' quadranti si traguardi l'estremo C, ed in questa visuale istessa deve ritrovarsi il punto B. Indi per maggior sicurezza, se sia possibile, si collinei il segno lontano E nella stessa direzione di C, e dall'altra parte si collinei il segno D nella direzione della medesima linea de' quadranti, tantochè i punti D, A, C, E sieno nella visuale dello squadro. Fatto questo si toglie lo squadro da A ed ivi si lascia un oggetto distinto, e col compasso, guardando sempre il punto B, si misuri la linea inclinata AB. Arrivato in B, si fissa lo squadro in maniera, che colla visuale istessa si traguardi il segno posto in A da una parte, e dall'altra si deve vedere il segno C, affinchè i punti A, B, C sieno nella stessa direzione. Dopo questo, si toglie lo squadro da B, e col compasso, guardando sempre il punto C, si misuri l'altra linea inclinata BC. Giunto in C si fermi lo squadro, e collineando il punto B, ed indi l'oggetto A, dovrà vedersi nella stessa direzione, se sarà osservabile il segno D da una parte, mentrechè dall'altra parte dovrà scovrirsi nella medesima visuale l'altro segno E. Quando tutto questo così avvenisse, la linea ABC sarà portata a squadro, e misurata esattamente.

Quando poi gli operatori sieno due, in tal caso faremo così. Si ponga in A il primo squadro, e colla sua linea visuale si collinei l'estremo C, e se sia possibile, anche il segno lontano E, e si traguardi benanche nella stessa visuale il punto infimo B, e questo da una parte; mentrechè dal-

L'altra parte dello squadro si osservi il segno lontano D. Fatto questo, vada in B il secondo squadro, ed affinchè questo s'incontri colla visuale di A, è necessario, che l'operatore A faccia segnale a B, ora a destra, ed ora a sinistra, finchè il medesimo si trovi nella dovuta direzione. Dopochè B si sia posto nella visuale di A, fisserà lo squadro, ed allora colla sua linea visuale de' quadranti deve collineare A da una parte, e dall'altra, deve incontrare il segno C, e succedendo questo, egli è sicuro di essere nella direzione della linea ABC. Dato il segnale da B, che già sia posto a squadro, l'operatore in A toglie il suo squadro, e col compasso misura la linea inclinata AB, guardando sempre in B. Giunto quì, lo squadro B resta immobile, ma l'operatore, che ha percorsa la linea AB, si porterà in C; ed affinchè si ponga a squadro, o sia nella direzione della visuale in B, egli fa uopo, che l'operatore di B gli faccia segnale, ora a destra, ed ora a sinistra, finchè l'operatore C si ponga nella direzione della visuale di B. Postosi adunque nella richiesta posizione, fisserà lo squadro C, e poi deve incontrare colla sua linea visuale de' quadranti da una parte il punto B, l'oggetto A, e se sarà visibile, anche il segno D, tutti nella stessa direzione; mentrechè poi dall'altra parte dovrà incontrare nella sua visuale il segno E, ed allora la linea si sarà portata bene a squadro. Eseguito questo, dal punto C si farà segnale a B di essere a squadro, o sia nella dovuta posizione; per cui l'operatore B toglie lo squadro, e col compasso misurerà la linea inclinata BC, rimirando sempre in C; ed in questo modo avremo misurata una linea scorrente per una valle con tutta la precisione.

2. *Misurare una linea accessibile con determinare le altre linee laterali.* Ella è cosa indubitata, che nelle operazioni della campagna, qualora accadesse, che una linea da riconoscersi colla misura effettiva, e che da noi deve riguardarsi come linea principale, si debba porre a squadro, o sia che si debba riguardare con una visuale de' quadranti del medesimo strumento, allora questo squadro si fissa in un estremo della medesima linea misurabile. Questa linea principale è la vera linea de' quadranti, e che i pratici chiamano *la Quadrante*. Ora nello scorrere la medesima, suole per lo più accadere, che lateralmente alla medesima si debbono altresì misurare altre piccole linee, che sono perpendicolari alla quadrante. Esguiremo questo problema nel modo seguente.

Fig. 34 Sia da misurarsi la linea principale BA, e scorrendo la medesima, dove accaderà, si debbano riconoscere, e misurare anche le sue linee laterali, che cadono a perpendicolo sulla medesima. Per eseguirlo, si fissi in B lo squadro, e secondo le regole antecedenti, si traguardi tutta la direzione della linea BA con tutti i segni occorrenti. Disposto questo, avremo BA per linea principale de' quadranti. Indi si tolga da B lo squadro, e col compasso s'incominci la misura, guardando senpre il segno d'avanti A. Arrivato in C, si deve misurare la linea laterale CD, per cui fermandosi in C collo squadro, colla solita visuale de' quadranti si debbono riscontrare i dati segni di B, e di A, per essere sicuri di stare nella stessa direzione traguadata da B in A. Dopo questo, non si muova si fatta prima visuale de' quadranti dello squadro, mentrechè coll'altra visuale de' quadranti si deve incontrare il punto D, per misurare la perpendicolare CD. Ora nel caso, che questo punto D non s'incontri nella visuale dello squadro, allora si andrà un poco avanti verso A, o un poco addietro verso B, ma sempre nella direzione di BA, finchè coll'altra visuale dello squadro s'incontri il punto D, mentrechè colla prima si debbono rivedere i segni di B, e di A. Incontrato a questo modo nello squadro si fatto punto, si fermi lo strumento, e senza più rimuoverlo, col compasso si misuri la linea laterale CD. Fatto questo, si tolga lo squadro da C, e portando sempre in vista il segno A, col compasso si segua a misurare la linea principale, o sia la quadrante CE. Giunto in E, si deve misurare la linea laterale EH, per cui fermandosi in E collo squadro, e colla stessa visuale de' quadranti si debbono di nuovo riconoscere i soliti segni di B, e di A. Fatto questo, coll'altra visuale de' quadranti dello squadro si deve incontrare il punto H, per indi misurare la perpendicolare EH, e nel caso che non ancora s'incontrasse, si vada un poco verso A, o verso B, finchè si scorga detto punto, ma sempre colla direzione di BA della quadrante. Incontrato così il punto H, si fermi lo squadro, e poi si misuri EH. Eseguito questo, si tolga lo squadro da E, e portando in vista il segno A, si prosegua a misurare la quadrante EI. Arrivato in I, si deve misurare l'altra linea laterale IK, e per far questo, si fermi in I lo squadro, e colla solita visuale si rincontrino di nuovo i soliti segni di B, e di A. Indi coll'altra visuale si cerchi d'incontrare il punto K, con muoversi un poco avanti, o in dietro dal punto I, finchè si vegga nella visuale dello squadro, adoperando le me-

desime descritte diligenze. Fatto il tutto, si fermi lo squadro in I, e si misuri IK. Di poi si tolga da I lo strumento, e portando avanti il solito segno A, si continui la misura della linea principale IG. In questo luogo si deve misurare un'altra linea laterale GF, per cui si fissi in G lo squadro, e colla solita visuale si riconoscano i segni soliti di B, e di A; indi coll'altra visuale si cerchi di rincontrare il punto F con muovere lo strumento un poco avanti verso A, o indietro verso B, finchè si veggia nella visuale dello squadro, e nel tempo istesso nell'altra visuale si debbano ritrovare i segni di B, e di A. Così determinato il tutto, si fermi lo squadro in G, e si misuri GF. Finalmente tolto lo squadro da G, e portando di mira il solito segno di A, si compisca la misura GA della linea principale.

In seguito di questa pratica egli è a sapersi, che essendo BA la linea principale, o sia la quadrante, le altre linee laterali CD, EH, IK, GF, che sono ad angoli retti, o sia a perpendicolo colla prima, si dicono *Toccature*; e la funzione che si fa collo strumento in ciascheduno de' punti C, E, I, G delle toccature per mettere a squadro la quadrante, e poi lateralmente collineare le laterali, si dice *Voltare a Squadro*.

3. *Misurare una linea accessibile ne' due estremi, ma nel mezzo inaccessibile.* Quando una linea misurabile sia accessibile solo ne' due estremi, ma poi nel mezzo sia inaccessibile, a cagione di qualche impedimento, allora due casi possono darsi, ogni qualvolta si sia nella necessità di doverla conoscere in misure.

Sia per primo caso da misurarsi la linea BA accessibile solo negli estremi B, ed A, ma poi nel mezzo G sia inaccessibile per causa di qualche intoppo, come un fosso, un lago, un fiume, un bosco, una città, od altro simile. Supponiamo intanto, che questo ostacolo G non impedisca, che da B si veggia l'estremo A, per cui la linea BA sia tutta visibile da B in A, e da A in B. Per misurarla si farà così. Si ponga in B lo squadro, e con una sua linea visuale de' quadranti si traguardi l'estremo A visibile da B, e si prendano in direzione di B, e di A i soliti segni lontani. Fatto questo, si tolga lo squadro da B, e si misuri BC fin dove si possa per cagione dell'ostacolo. Giunto in C, si fermi lo squadro, e colla stessa visuale si riconoscano i segni di B, e di A da un verso, e poi dall'altro verso si osservi, dove si diriga l'altra vi-

Fig. 35

suale de'quadranti, la quale sarà per CD. Dunque in C con questa seconda linea visuale in direzione di CD si prendano i segni lontani da una parte, e dall'altra. Fatto questo, si tolga lo squadra da C, e si misuri CD. Arrivato in D, luogo fuori dell'ostacolo G, si fissi lo squadra, e colla stessa linea visuale si traguardi la medesima linea DC percorsa, riconoscendo ivi anche i segni lontani da una parte, e dall'altra. Eseguito questo, e non movendo lo squadra, colla prima sua linea visuale si vegga dove questa si dirigga, e sarà per DE. Quindi in D nella direzione della linea istessa DE si prendano i segni lontani da una parte, e dall'altra. Di poi tolto lo squadra, si misuri DE, ed arrivato in E, luogo fuori dell'ostacolo, si fermi lo squadra, e colla stessa linea visuale si riconosca la linea percorsa ED in corrispondenza de' segni. Fatto questo, e restando immobile in E lo squadra, coll'altra sua visuale si osservi dove questa si dirigga, che sarà per EF. Dunque in E con questa seconda linea dello strumento in direzione di EF si prendano i segni lontani da una parte, e dall'altra, e che servono di guida. Indi si tolga da E lo squadra, e si misuri EF. Avvertasi intanto in questo luogo, che la misura di EF dovrà essere uguale a quella di CD, giacchè poi lo squadra giunto in F, dovrà ritrovarsi nella stessa direzione della linea BA. Quindi essendo in F, si fissi lo squadra, e colla sua linea visuale de'quadranti si riconoscano i primi segni della direzione della linea BA, per vedere se si stia nella stessa positura, e poi coll'altra visuale si riconoscano i segni della linea percorsa FE. Ritrovato, che tutto questo vada con esattezza, da F si tolga lo squadra, e pigliando di mira il segno di A, si compisca la misura per FA. Ora nella misura di BC, e di FA, aggiunta la quantità di DE, come uguale, e parallela a CF, la somma darà l'intera misura di tutta la linea BA, che si cercava.

Fig. 55 Sia per secondo caso da conoscersi in misure la linea AB accessibile solo negli estremi A, e B, ma poi inaccessibile nel mezzo D per cagione di un ostacolo. Supponiamo pure, che si fatto ostacolo non faccia vedere da A l'estremo B, nè da B si possa vedere l'estremo A. In sì fatte circostanze noi conosceremo la lunghezza di questa linea, servendoci del seguente artificio. Si scelga il sito C, che abbia due condizioni, la prima, che in questo luogo sieno visibili contemporaneamente l'estremo A, e l'estremo B; e la seconda, che posto lo squadra in C, con una sua quadrante si vegga il

punto A, e coll'altra quadrante si vegga il punto B nel tempo istesso. Quindi in C si fermi lo squadra, e con una linea visuale de'quadranti si traguardi l'estremo A colla direzione CA, e non movendo lo strumento, col' altra linea visuale de' quadranti si traguardi l' altro estremo B colla direzione CB; per cui il concorso in C delle due visuali costituiscono l'angolo retto C. Preparato tutto questo, si misuri CA, e sia di 59, e si misuri CB, e sia di 119. Ora nel triangolo rettangolo ACB, conoscendo i due cateti CA, CB, ritroveremo la lunghezza della ipotenusa. Quindi facendo il calcolo, avremo AB di $132 \frac{1}{11}$, e questa sarà la misura della lunghezza AB, che si voleva sapere.

4. *Misurare una linea accessibile solo in uno estremo, ed in tutto il resto inaccessibile.* Se si abbia da conoscere in misure una linea, di cui un solo estremo sia accessibile, ma poi nel mezzo, e nell'altro estremo sia inaccessibile, allora due casi possono accadere, quando porta l'occasione di doverla misurare.

Sia per primo caso la linea AB accessibile nel solo estremo A, ed in tutto il resto inaccessibile, sebbene visibile. Supponiamo intanto, che partendoci noi dall'estremo A verso C, possiamo estenderci quanto conviene. Posto questo, per eseguire il problema, faremo così. Si ponga in A lo squadra, e con una sua quadrante si collinei AB, affinchè questa linea sia posta a squadra; poi non movendo lo strumento, ci volteremo a squadra, e coll'altra visuale de'quadranti si traguardi la direzione AC colle solite diligenze, e co'soliti segni, ed avremo in A l'angolo retto, fatto nell'asse dello squadra. Eseguito questo, si tolga lo squadra da A, e portando a vista il segno di C, si vada misurando AC. Quando siamo verso C si riconosca, colla stessa linea visuale de'quadranti dello squadra, la percorsa linea CA, che deve ritrovarsi tra i soliti segni. Dopo questo, si fermi lo squadra in C, e colla prossima linea delle diagonali si traguardi l'estremo B. Se questo punto s'incontra in queste linee diagonali, resta fermo lo strumento; se poi non s'incontrasse, allora si porta lo squadra un poco verso A, o un poco dietro di C, finchè s' incontri nelle diagonali l'estremo B, restando però le quadranti dello squadra sempre nella direzione di CA. Determinato tutto questo, si osservi quanto sia stato il cammino di AC, e tanta per appunto sarà la lunghezza della linea AB, che si cercava.

Fig. 37

La ragione di questa pratica è manifesta. Imperciocchè i Geometri ci fanno sapere, che in ogni triangolo, i suoi tre angoli presi insieme, sono uguali a due angoli retti; e dippiù, che nello stesso triangolo, ad angoli uguali corrispondono lati uguali. Quindi essendo il triangolo BAC rettangolo in A, ed essendo dippiù l'angolo B un semiretto, per cui sarà il lato misurato AC uguale al lato cercato AB, che è la linea, che si voleva sapere.

Fig. 38 Sia per secondo caso la linea AB accessibile nel solo estremo A, ed in tutto il resto inaccessibile, sebbene visibile. Supponiamo intanto, che partendoci dall'estremo A verso C, non possiamo estenderci per quanto le circostanze del terreno lo permettono. Posto questo, per conoscere la linea AB, faremo così. Si ponga in A lo squadro, e con una sua quadrante si collinei AB per farla stare a squadro; poi non movendo lo strumento, voltandoci a squadro, coll'altra visuale de'quadranti, si traguardi la direzione AC, colle solite diligenze, e co'soliti segni, ed avremo in A l'angolo retto fatto nell'asse dello strumento. Fatto questo, si tolga da A lo squadro, e s'incominci a percorrere la linea AC fin dove si vuole, come sino a C. In questo punto colla stessa quadrante dello squadro si riconosca la linea CA, per vedere, se si trovi tra i medesimi segni. Assicurato da tutto questo, si traguardi da C il punto estremo B con qualunque linea visuale dello squadro, con pigliare i segni occorrenti da ambe le parti. Di poi dal punto C, portando sempre in vista il segno A, si misuri CD ad arbitrio, e si noti la quantità del cammino, e sia CD di 10, e DA di 24. Indi in D colla linea de'quadranti si riconosca la stessa direzione di AC, ed assicurata di stare a squadro, si fermi quivi lo strumento, e non più si muova. Di poi coll'altra sua quadrante, l'operatore si volti a squadro per fissare la linea laterale DE tanto lunga, finchè tocchi in E la visuale CB. Si misuri finalmente DE, e sia di 14. Eseguito tutto questo apparecchio, sarà facile di calcolare la linea AB con far uso della regola del tre per lo innanzi esposta, e diremo così. La parte CD di 10 sta a DE di 14, come tutta la CA di 34 alla incognita AB. Fatto il calcolo, ritroveremo in misure la linea AB di $47\frac{2}{3}$, che si cercava.

5. Misurare una linea, tutta inaccessibile. Alle volte suole avvenire, che ci bisogna di conoscere in misure una linea, la quale, per le circostanze, sia inaccessibile da per tutto. Or ciò non ostante, noi possiamo conoscerla, quan-

te volte i due estremi suoi sieno visibili da un punto lontano.

Per eseguire si fatto problema faremo così. Si scelga un punto C, che abbia due condizioni; la prima, che da questo punto sieno contemporaneamente visibili i due estremi A, e B della linea, che si cerca; e la seconda, che fissato in C lo squadra, con una sua quadrante si collinei l'estremo A, e non movendo lo strumento, coll'altra sua quadrante si debba traguardare l'altro estremo B, in maniera, che il concorso delle due visuali AC, BC formino l'angolo retto C nell'asse dello strumento, per cui il triangolo ACB sarà rettangolo in C. Assicurato di questo, la visuale BC si porti a squadra, o sia che si continui in diretto quanto piaccia per CD, e poi dal punto D si collinei la visuale indeterminata DA. Inoltre dal punto D si retroceda ad arbitrio per DG, ed in questo punto G, mettendosi collo squadra nella direzione di DC, si volti a squadra per dirigere la perpendicolare GF finchè tocchi in F la visuale DA. Fatto questo, si misuri ogni linea, che bisogna, ed avremo DG di 12, GF di 32, e GC di 24. Quindi calcoleremo il primo cateto CA dicendo così: La parte DG di 12 sta alla parte GF di 32, come tutta la DC di 36 alla CA, che si trova di 96, e che è il primo cateto.

Inoltre l'altra visuale AC si porti a squadra, o sia, che si continui in diretto per quanto piaccia per CE, e poi dal punto E si collinei la visuale EB. Dal punto E si retroceda ad arbitrio per EI, ed in questo punto I mettendosi collo squadra nella direzione di EC, si volti a squadra per dirigere la perpendicolare IH, finchè tocchi in H la visuale EB. Fatto questo, si misurino le linee occorrenti, ed avremo EI di 15: IH di 30, ed IC di 19. Saputo questo, calcoleremo l'altro cateto CB dicendo così: La parte EI di 15 sta alla parte IH di 30, come tutta la EC di 34 alla CB, che si trova di 68, e che è il secondo cateto.

Ridotta così l'operazione, sarà facile di calcolare la linea inaccessibile AB. Imperciocchè nel triangolo rettangolo ABC, conoscendo i due cateti CA di 96, e CB di 68, fatto il calcolo, ritroveremo essere la ipotenusa AB di $117 \frac{1}{3}$, che è la inaccessibile, che si voleva conoscere in misure.

Fig. 39

CAPO VI.

LA PLANIMETRIA.

§ I.

La Quadratura.

Dopo che la Longimetria ci ha spianata la strada di poter conoscere in misure qualunque specie di lunghezza, sarà facile cosa d'introdurci in quell'altro punto di pratica, che ci farà conoscere il vero metodo, col quale possiamo fare le piante degli oggetti, che ci proponiamo di conoscere, e di misurarne esattamente la quantità superficiale. S'è fatta quantità di superficie, ben si capisce, che debba esprimersi in misure quadrate, per cui il risultato del calcolo per tutte le specie delle superficie, si dirà da noi *Quadratura*. Ora riflettendo sulla conoscenza delle quadrature, si scorge chiaro, che giammai questa potrà calcolarsi, se pria degli oggetti non se ne sia fatta la di loro pianta, ovvero rappresentazione. Il metodo adunque, che ci conduce a sapere rilevare la pianta di qualsivoglia territorio, si dirà da noi *Configurazione*. Quindi siccome la quadratura nasce in seguito della configurazione, perciò nelle operazioni, che descriveremo per poter configurare una pianta, avremo anche il metodo da saperne calcolare la sua quadratura. La configurazione adunque, e la quadratura unite insieme, poichè ci danno la perfetta conoscenza delle superficie, perciò questa parte della pratica, si dice da noi *Planimetria*, e della quale con tutta la precisione ne esporremo le regole.

1. *Dividendo una linea retta in due parti disuguali, determinare la proporzione delle medesime parti.* Sia data la linea retta AB lunga di 100, e la medesima venga divisa in C disugualmente, ed in maniera, che CA sia di Fig. 40 40, e CB sia di 60. Queste due porzioni disuguali CA, CB si dicono *Segmenti*, uno maggiore, e l'altro minore. Per vedere quanto l'uno abbia di più dell'altro segmento, si faccia dal punto C la parte CD uguale a CA, per cui resta il residuo DB, che si dice *Differenza de' Segmenti*. Ora egli è chiaro, che essendo la intera AB di 100, ed essendo il segmento minore CA di 40, ed il segmento maggiore CB

di 60; e perchè dal maggiore CB si è tagliata la parte CD uguale a CA, perciò resta la porzione DB di 20 per la differenza de' segmenti.

2. *Dati tutti tre i lati di un Triangolo qualunque, ritrovare dove cada la perpendicolare, e quanto sia lunga.* Nella misura superficiale de' triangoli di qualunque specie, o sia nella quadratura de' medesimi, e come accade ancora in ogni altra figura rettilinea, egli è indispensabile di sapere in misure *due linee rette unite ad angolo retto*. Quindi si scorge chiaro, che trattandosi di triangoli, i medesimi possono essere rettangoli, ovvero obbliquangoli. Se il triangolo sia rettangolo, in questo caso si sapranno subito le due linee unite ad angolo retto; poichè queste due linee sono sempre i due cateti, che formano l'angolo retto, e dei quali uno rappresenta la *Base*, e l'altro l'*Altezza* del triangolo rettangolo.

Non così poi avviene ne' triangoli obbliquangoli; giacchè ne' medesimi non possono ritrovarsi mai due lati, che si uniscano ad angolo retto, per cui necessariamente deve accadere, che la perpendicolare richiesta, o sia l'altezza dovrà immaginarsi tirata da un angolo qualunque a perpendicolo sopra di un lato. Se il triangolo fosse acutangolo, in questo caso tirando la perpendicolare da un angolo qualunque sopra del lato opposto, questa istessa linea, che è l'altezza del triangolo, caderà sempre nell'arca del medesimo triangolo. Che se poi il triangolo fosse ottusangolo, in questo altro caso, se la perpendicolare si voglia far cadere sopra il lato massimo, la medesima tirandosi dall'angolo ottuso cadrà dentro dell'area triangolare. Quando poi questa perpendicolare non si facesse cadere sopra il lato massimo, allora tirandosi da un angolo acuto, cadrà fuori del triangolo, e si fermerà dove s'incontra ad angolo retto con un lato prolungato del medesimo triangolo. Scioglieremo dunque il problema in tutte tre le specie de' triangoli, facendo uso delle regole seguenti.

1. Sia in primo luogo da ritrovarsi dove cada la perpendicolare, o sia l'altezza, e quanto sia lunga nel triangolo ABC rettangolo in C. Sia intanto AB di 150, AC di 110, Fig. 41 e BC di 103. Poichè in questo caso il lato AC è perpendicolare a BC, comechè sono i due cateti, così questo istesso lato AC sarà la perpendicolare, o sia l'altezza del triangolo rettangolo ABC.

2. Sia in secondo luogo da ritrovarsi dove cada la perpendicolare, o sia l'altezza, e quanto sia lunga nel triangolo acutangolo. Essendo in questo caso triangolo acutangolo, e la perpendicolare cadrà necessariamente dentro del triangolo. Per ritrovare questa perpendicolare due casi possono accadere; o la perpendicolare cade sopra il lato massimo, o sopra un altro lato.

Fig. 42 Sia per primo caso, che nel triangolo ABC sia da calcolarsi la perpendicolare AD, la quale dall'angolo A si faccia cadere sopra il lato massimo BC. Sia intanto AB di 118, AC di 154, BC di 162. Per calcolarla, bisogna prima ritrovare il punto D, che divide la retta BC in due segmenti disuguali, facendo così. Il lato massimo BC di 162 sta alla somma 272 degli altri due lati AB, AC, come la di loro differenza 36 alla differenza de' segmenti. Fatto il calcolo, si trova $60\frac{1}{2}$. Questo numero vuol dire, che cadendo la perpendicolare in D, il segmento DB è minore del segmento DC della quantità ritrovata $60\frac{1}{2}$; per cui da tutto BC di 162, sottratto $60\frac{1}{2}$, che è la differenza de' segmenti, il residuo $101\frac{1}{2}$ rappresenta quel che resta della base BC; e poichè la perpendicolare AD in conseguenza cade nel mezzo di questo resto della base, perciò il segmento DB sarà di $50\frac{1}{4}$, ovvero 51. Ritrovato così il segmento DB, sarà facile il ritrovare l'altezza AD. Nel triangolo ADB rettangolo in D, conoscendo l'ipotenusa AB di 118, il cateto BD di 51, risolvendo questo triangolo rettangolo col maneggio de' quadrati, troveremo l'altro cateto AD di $106\frac{1}{2}$, e questa per appunto sarà la perpendicolare, o sia l'altezza ricercata.

Fig. 43 Sia per secondo caso, che nel triangolo acutangolo ABC debba calcolarsi la perpendicolare AD, la quale dall'angolo A si faccia cadere sopra un lato qualunque BC, che non sia il massimo. Sia intanto AB di 118, AC di 139, BC di 109. Per calcolarla, bisogna prima ritrovare il punto D per sapere uno de' segmenti DB, facendo così. Il quadrato della base BC di 11881 si unisca al quadrato del lato AB di 13924, che è il lato adiacente al segmento BD, che si cerca, e dalla di loro somma 25805 si sottragga il quadrato del terzo lato AC di 19321, ed il residuo 6484 si divida pel doppio 218 della semplice base BC di 109, ed il quoziente $29\frac{1}{2}$, ovvero 30, sarà la lunghezza del segmento BD, che si cercava. Essendosi conosciuto il segmento BD di 30, si ritrova l'altezza AD. Nel triangolo ABD, rettangolo in D, cono-

scendo l'ipotenusa AB di 118, il cateto BD di 30, colla risoluzione di questo triangolo rettangolo, ritroveremo l'altro cateto AD di $114 \frac{2}{3}$, e questa sarà la perpendicolare, o sia l'altezza richiesta.

3. Sia in terzo luogo da ritrovarsi dove cada la perpendicolare, o sia l'altezza, e quanto sia lunga nel triangolo ottusangolo. Poichè ne' triangoli ottusangoli, quando la perpendicolare si tira dall'angolo ottuso sopra il lato massimo, la medesima cade dentro del triangolo; e quando poi si tirasse da un angolo acuto, essa cadrà fuori del medesimo, così potendosi averare questi due casi, perciò due pratiche si possono eseguire.

Sia per primo caso, che nel triangolo ottusangolo ABC sia da calcolarsi la perpendicolare AD, la quale dall'angolo ottuso A si faccia cadere sopra il lato massimo BC, e perciò dentro del triangolo. Sia intanto AB di 75, AC di 148, BC di 181. Per calcolarla bisogna prima ritrovare il punto D, ed il segmento DB, facendo così. Il lato massimo BC di 181 sta alla somma degli altri due AB, AC di 223, come la di loro differenza 73 alla differenza de' segmenti. Fatto il calcolo, si trova $89 \frac{17}{23}$. Questo numero sottratto da tutto BC di 181, il residuo $91 \frac{6}{23}$ rappresenta quel che resta della base BC, nel di cui mezzo si trova il punto D. Quindi il numero $91 \frac{6}{23}$ diviso per metà, il quoziente $45 \frac{3}{23}$, ovvero 46 rappresenterà il segmento DB. Ritrovato così questo segmento, sarà facile calcolare la perpendicolare, o sia l'altezza AD. Nel triangolo ADB rettangolo in D, conoscendo l'ipotenusa AB di 75, il cateto BD di 46, risolvendo questo triangolo, ritroveremo l'altro cateto DA di $59 \frac{2}{11}$, e questa sarà per appunto la perpendicolare, o sia l'altezza cercata.

Fig. 44

Sia per secondo caso, che nel triangolo ottusangolo ABC debba calcolarsi la perpendicolare AD, la quale dovendosi tirare dall'angolo acuto A, la medesima cadrà tutta fuori del triangolo, e che si unisce in D col prolungamento del lato BC. Sia intanto AB di 204, AC di 157, BC di 92. Per calcolarla, bisogna prima conoscere il punto D per sapere il prolungamento CD, facendo così. Il quadrato della base BC di 8464 si unisca col quadrato di AC di 24649, che è il lato adiacente alla perpendicolare, ed all'angolo ottuso, e la di loro somma 33113 si sottragga dal quadrato di AB di 41616, ed il residuo 8503 si divida pel doppio della base BC di 184, ed il quoziente $46 \frac{2}{11}$ esprimerà la lunghezza CD. Cono-

Fig. 45

sciuta così questa linea, sarà facile calcolare l'altezza AD. Nel triangolo rettangolo ADC, conoscendosi l'ipotenusa AC di 157, ed il cateto CD di 46, risolvendo questo triangolo, si avrà l'altro cateto AD di $150\frac{3}{4}$, che è l'altezza richiesta.

3. *Misurare la quadratura di un triangolo.* Poichè i triangoli possono essere, o rettangoli, o acutangoli, ovvero ottusangoli, così tre casi possono darsi per la quadratura dei medesimi. Per calcolare si fatta quadratura ne' triangoli, egli è indispensabile di sapere in misure due linee, che si uniscono ad angolo retto, delle quali una è la *base*, e l'altra l'*altezza* del triangolo. Ora la base si ha sempre in uno de' lati del triangolo; ma non così avviene poi per l'altezza; giacchè ne' triangoli rettangoli solamente, essendo un cateto la base, l'altro cateto sarà l'altezza; ma ne' triangoli acutangoli, l'altezza sarà la linea tirata da un suo angolo a perpendicolo sopra di un lato, e cade sempre dentro dell'area triangolare; ne' triangoli ottusangoli poi quest' altezza cadrà dentro dell'arca, qualora si tiri dall'angolo ottuso sopra il lato massimo; e cadrà fuori dell'area, quando si tiri da un angolo acuto, finchè si unisca col prolungamento esterno della base. Risolveremo questo problema in tutti tre i casi enunciati.

Fig. 46 1. Sia per primo caso da misurarsi la quadratura del triangolo ABC rettangolo in C. Supponiamo già noto un cateto BC di 116, e l'altro cateto AC di 98; e di questi due, il cateto BC rappresenta la base, ed il cateto AC rappresenta l'altezza, giacchè sono uniti in C ad angolo retto. Conoscendo dunque in questo triangolo la base, e l'altezza, perciò possiamo ritrovare la sua quadratura in due modi differenti. Il primo è di moltiplicare la base BC di 116 per l'altezza AC di 98, e del prodotto 11368 se ne prenda la metà 5684, e questo numero sarà la quadratura del triangolo. Il secondo modo di calcolare la stessa quadratura è di moltiplicare la base BC di 116 per la metà 49 dell'altezza AC di 98, ed il prodotta 5684 sarà la quadratura richiesta del medesimo triangolo. Avvertiamo in questo luogo, che sebbene la quadratura de' triangoli possa farsi colle due esposte maniere, pur tuttavia noi, nel progresso, ci serviremo sempre dell'ultima, moltiplicando la base per la metà dell'altezza.

Fig. 47 2. Sia per secondo caso da misurarsi la quadratura del triangolo ABC, del quale supponiamo già conosciuta la base BC di 115, e la sua altezza AD di 116. Per avere la sua quadratura si moltiplichino la base BC di 115 per la metà 58

dell' altezza AD di 116, ed il prodotto 6670 sarà la quadratura richiesta.

3. Sia per terzo caso da misurarsi la quadratura del triangolo ottusangolo ABC, del quale l' altezza AD la supponiamo tirata dentro del medesimo; e supponiamo di più, che ci sia nota la base BC di 167, e la sua altezza AD di 66. Per avere la sua quadratura, si moltiplichino la base BC di 167 per la metà 33 dell' altezza AD di 66, ed il prodotto 5511 sarà la sua quadratura. Fig. 48

Quando poi del triangolo ottusangolo ABC la sua altezza AD cadesse fuori dell' area, anche in questo caso l' operazione è la stessa. Supponiamo già nota la base BC di 85, e l' altezza AD di 129. Per avere la quadratura, si moltiplichino la base BC di 85 per la metà $64\frac{1}{2}$ dell' altezza AD di 129, ed il prodotto 5482 $\frac{1}{2}$ sarà la quadratura, che si cercava. Fig. 49

4. *Misurare la quadratura di un Parallelogrammo.*
Per misurare la quadratura di un parallelogrammo, egli è anche indispensabile di sapere prima la lunghezza di due linee, le quali sieno unite ad angolo retto. Di qui ne segue, che essendo i parallelogrammi di quattro specie, quadrato, rettangolo, rombo, e romboide, perciò ne nasce, che nel quadrato, e nel rettangolo, due di loro lati, che si uniscono ad angolo retto, i medesimi rappresenteranno le due linee ricercate, delle quali una sarà la base, e l' altra l' altezza. Non così poi avviene nel rombo, e nel romboide; giacchè sebbene ne' medesimi possiamo avere due lati conosciuti, che si uniscono, pur tuttavia questo angolo di unione non essendo retto, noi dobbiamo tirare la perpendicolare dall' estremo dell' uno sopra dell' altro, e questa perpendicolare sarà l' altezza, che si dovrà prima sapere. Scioglieremo questo problema in tutti quattro gli enunciati parallelogrammi.

1. Sia per primo caso da misurarsi la quadratura del parallelogrammo quadrato AC, di cui si sappia il lato AB di 77, ed il lato BC anche di 77, comechè quadrato. Poichè questi due lati sono uniti in B ad angolo retto, perciò uno di questi rappresenta la base, e l' altro l' altezza. Ora per avere la sua quadratura, o si moltiplichino il lato AB di 77 col lato BC anche di 77, o pure la sola base BC di 77 per se stessa, ed il prodotto 5929 rappresenterà la quadratura richiesta. Fig. 50

2. Sia per secondo caso da misurarsi la quadratura del parallelogrammo rettangolo AC, di cui si sappia il lato AB di 77, ed il lato BC di 145. Poichè questi due lati sono uniti in B ad angolo retto, perciò uno di questi rappresenta la base, e l'altro l'altezza. Quindi per avere la sua quadratura si moltiplichì la base BC di 145 per la sua altezza AB di 77, ed il prodotto 11165 sarà la ricercata quadratura.

Fig. 52 3. Sia per terzo caso da misurarsi la quadratura del parallelogrammo rombo BD, di cui si sappia il lato AB di 77, ed il lato BC anche di 77, comechè rombo. Poichè questi due lati sono uniti in B ad angolo acuto, perciò uno di questi lati, come AB non può essere l'altezza. Dunque dall'estremo A si tiri la perpendicolare AE sopra la base BC, e sia di 69. Quindi per avere la quadratura del rombo, si moltiplichì la base BC di 77 per l'altezza AE di 69, ed il prodotto 5313 sarà la quadratura, che si voleva.

Fig. 53 4. Sia per quarto caso da misurarsi la quadratura del parallelogrammo romboide BD, di cui si sappia il lato AB di 77, ed il lato BC di 156. Poichè questi due lati sono uniti in B ad angolo acuto, perciò uno di questi lati, come AB non può essere l'altezza. Dunque dall'estremo A si tiri la perpendicolare AE sopra la base BC, e sia di 64. Quindi per avere la quadratura del romboide, si moltiplichì la base BC di 156 per l'altezza AE di 64, ed il prodotto 9984 sarà la richiesta quadratura.

Quando accade, che nelle figure obbliquangole, come quì, il rombo, ed il romboide, oppure ne' triangoli acutangoli, ed ottusangoli si debba tirare la perpendicolare, o sia l'altezza sopra la base, e poi sapersi in misure, per indi calcolare la quadratura, allora dovendosi questa operazione eseguire in campagna, si farà così. Dal punto B portando a squadra la linea BC si misuri BE sino al punto E, in dove l'operatore si fermi per voltarsi a squadra, e traguardare il punto A. Fatto questo, si avrà nel triangolo rettangolo ABE l'ipotenusa AB, ed un cateto BE, per cui sarà facile calcolare l'altro cateto EA, che è l'altezza, che si cerca.

5. *Misurare la quadratura di un Poligono.* Siccome i poligoni possono essere infiniti, così noi daremo una regola generale per la quadratura de' medesimi. Per quadrare dunque qualsivoglia poligono, egli bisogna misurare un lato, indi misurare la perpendicolare tirata dal centro sino al lato misurato; di poi si moltiplichì questo lato per la metà

della perpendicolare, ed il prodotto si torni a moltiplicare per lo numero de' lati del poligono, ed il risultato sarà la quadratura ricercata. La ragione di questa pratica è paten-
tissima; poichè ogni poligono si divide in tanti triangoli u-
guali quanti sono i suoi lati. Sia il poligono esagono A, di cui si cerca la quadratura. Si misuri un lato BC, e sia di 50, indi dal centro A si tiri sopra del medesimo la perpendicolare AD, e sia di 60. Fatto questo, si moltiplichino il lato BC di 50 per la metà 30 della perpendicolare AD di 60, ed il prodotto 1,500 rappresenterà la quadratura del triangolo ABC. Questa quadratura triangolare 1,500 si moltiplichino per 6, giacchè questo è il numero de' lati del poligono, ed il prodotto 9,000 sarà l'intera quadratura del proposto poligono. Fig. 54

6. *Misurare la quadratura di un Cerchio.* La quadratura del piano circolare è stato un problema quanto famoso, altrettanto impossibile ad eseguirsi esattamente. Archimede dimostra, che la esatta proporzione tra il diametro, e la circonferenza non possa ritrovarsi, ma la prossima solamente, facendoci vedere, che il diametro stia alla circonferenza presso a poco, come 7 a 22. E poichè la quadratura delle superficie si ha, moltiplicando un lato per un altro, i quali debbono essere non solo linee rette esattamente misurate, ma che le medesime debbano eziandio unirsi ad angolo retto; così ne nasce per conseguenza, che non potendosi ritrovare l'esatto rapporto del diametro, che è una linea retta, relativamente alla circonferenza, comchè linea curva, così l'effetto della di loro vicendevole moltiplica non potrà produrre la esatto, e vera quadratura del piano circolare, ma ci mostra soltanto la prossima, o sia quella, che senza error sensibile può servirci nella pratica. Intanto siccome il cerchio ha tre parti distinte, che sono *Diametro*, *Circonferenza*, e *Piano circolare*, così essendoci nota una sola di queste, possiamo calcolare le altre due, facendo uso della proporzione di Archimede. Risolveremo il tutto nei tre casi seguenti.

1. Se di un cerchio si sappia il suo diametro, ne sapremo la circonferenza, ed il piano circolare. Sia il diametro di un cerchio 20, per ritrovare la lunghezza della circonferenza, si faccia la seguente regola del Tre. Come 7 sta a 22, così 20 al quarto proportionale. Fatto il calcolo, ritroveremo $62\frac{2}{3}$, e questa sarà la lunghezza della circonferenza proporzionata al diametro dato.

Si può ottenere lo stesso con moltiplicare semplicemente il diametro 20 per $3\frac{1}{3}$, ed avremo lo stesso prodotto $62\frac{2}{3}$. La ragione di questo secondo metodo è facile a capirsi; giacchè stabilendo Archimede la proporzione del diametro alla circonferenza come 7 a 22, si vede chiaro, che 7 entra nel 22 per 3 volte, ed $\frac{1}{3}$; e ne' casi occorrenti noi faremo uso di questa semplicissima operazione per evitare la lunga pratica della regola del tre.

Inoltre saputo il diametro 20, e la circonferenza calcolata $62\frac{2}{3}$, per avere la quadratura del piano circolare, si moltiplichì la circonferenza $62\frac{2}{3}$ per la quarta parte 5 di tutto il diametro 20, ed il prodotto $314\frac{2}{3}$ sarà la richiesta quadratura del cerchio.

2. Se di un cerchio si sappia la circonferenza, ne sapremo il diametro, ed il piano circolare. Sia la circonferenza 84; per ritrovare il diametro corrispondente, si faccia così. Come 22 sta a 7, così 84 al quarto proporzionale. Fatto il calcolo, si trova il diametro $26\frac{2}{3}$. Si può fare ancora così. Si divida 84 per $3\frac{1}{3}$, ed avremo $26\frac{2}{3}$ per lo stesso prodotto.

Per avere la quadratura del piano circolare, o si moltiplichì il diametro per la quarta parte 21 della circonferenza, ovvero si moltiplichì la circonferenza intera per l'intero diametro, e del prodotto se ne prenda la quarta parte $561\frac{1}{3}$, e questa sarà la richiesta quadratura del piano circolare.

3. Se di un cerchio ne sapremo la quadratura del piano circolare, ne sapremo eziandio il diametro, e la circonferenza. Sia la quadratura del piano circolare 600; per ritrovare il diametro, si faccia così. Dimostrano i Geometri, che lo spazio circolare stia al quadrato del suo diametro, come 137 a 200. Quindi per ritrovare il diametro si dica così. Come 137 sta a 200, così la data quadratura 600 al quarto proporzionale. Fatto il calcolo, si avrà $875\frac{1}{3}$, o sia semplicemente 876. Questo quarto proporzionale è il quadrato del diametro, che si cerca; per cui estratta la radice $29\frac{1}{3}$, o sia 30, la medesima sarà la lunghezza del diametro.

Per ritrovare poi la corrispondente circonferenza, o faremo uso della solita regola di Archimede, o moltiplicheremo il diametro ritrovato 30 per $3\frac{1}{3}$, ed il prodotto $94\frac{2}{3}$ sarà la lunghezza della circonferenza richiesta.

7. Dato un cerchio ignoto, conoscerne il diametro. Sia

un cerchio A, di cui non si possa colla effettiva misura conoscere, nè il diametro, nè la circonferenza, e perciò egli sarà ignoto. Ciò non ostante si vuol sapere in misure il suo diametro. Per conoscerlo, si faccia così. Si scelga il punto B, in dove si fissa lo squadro, e con una sua linea de' quadranti si traguardi l'estremo D nella visuale BD. Indi non movendo lo strumento, coll'altra linea de' quadranti si volti a squadro per determinare la linea del cammino BC con tutti i segni occorrenti. Fatto questo, si tolga lo strumento da B, e si misuri la linea BC sino al punto C, dove fissato lo squadro, con una sua linea de' quadranti si riconosca la linea percorsa CB, collineando di nuovo i segni; e non movendo lo strumento, si volti a squadro per vedere se, coll'altra linea de' quadranti, s'incontri l'altro estremo E. Se questo così accade, allora la linea BC, misurata, sarà uguale al diametro del dato cerchio ignoto, che si voleva conoscere.

Fig. 55

8. *Misurare la quadratura di un Settore di cerchio.*

Per misurare la quadratura di un settore circolare, due casi possono accadere, o che il settore sia meno del semicerchio, come BAC, o che sia più grande di un semicerchio, come BDC. Risolveremo amendue i casi colla pratica seguente.

Fig. 56

1. Sia per primo caso da ritrovarsi la quadratura di un settore BAC minore di un semicerchio. Si misuri col semicerchio l'angolo al centro A, e sia di 76 gradi, il quale darà il valore dell'arco CB del settore; indi si misuri il raggio AC, e sia di 51, il cui doppio 102 sarà il diametro CD. Con questo diametro CD di 102 si trovi la circonferenza $320 \frac{4}{7}$, e con questo diametro, e circonferenza si trovi la quadratura del piano circolare $8174 \frac{4}{7}$. Questa quadratura $8174 \frac{4}{7}$ si moltiplichi pe' gradi, e minuti dell'arco CB di 76 gradi, ed il prodotto $621267 \frac{4}{7}$ si divida pe' gradi 360 della intera circonferenza, ed il quoziente $1725 \frac{4}{11}$ darà la quadratura del settore richiesto.

2. Sia per secondo caso da ritrovarsi la quadratura di un settore BDC più grande del semicerchio. Si determini prima la quadratura del settore minore BAC di $1725 \frac{4}{11}$, la quale sottratta dalla intera quadratura del piano circolare $8174 \frac{4}{7}$, ed il residuo $6448 \frac{4}{11}$ darà la quadratura del settore.

Si può in altra maniera calcolare la quadratura comune ad ambedue i casi. Si misuri il raggio AC, e sia 51, ed il

*

diametro intero sarà 102; indi si misuri l'angolo A al centro, e sia di 76 gradi, il quale indica il valore in gradi, e minuti dell'arco CB. Inoltre col diametro 102 si calcoli la circonferenza $320 \frac{1}{2}$, e colla medesima, mediante la regola del tre, si determini la misura dell'arco CB, dicendo così. La circonferenza di 360 gradi sta alla sua lunghezza $320 \frac{1}{2}$, come l'arco CB di 76 gradi alla sua lunghezza, che si trova $67 \frac{1}{2}$. Ritrovata così la misura dell'arco, se questa si moltiplichi per la metà del raggio $25 \frac{1}{2}$, il prodotto $1725 \frac{1}{2}$ darà la quadratura del settore, che si cercava.

9. *Misurare la quadratura di un Segmento di cerchio.* Per calcolare la quadratura de' segmenti, due casi possono accadere, o il segmento sia minore del semicerchio, come *Fig. 57* ACB, o maggiore del semicerchio, come ADB. Risolveremo ambidue i casi nel modo seguente.

1. Sia per primo caso da calcolarsi la quadratura del segmento ACB minore del semicerchio. Per ritrovarla, si faccia così. Si misuri la corda AB, e sia 110, su di cui poggi il triangolo isoscele AEB; indi di questo triangolo si misuri l'altezza FE, e sia 32; per cui moltiplicando la base AB di 110 per la metà 16 dell'altezza FE di 32, il prodotto 1760 darà la quadratura del solo triangolo isoscele AEB.

Ritrovata la quadratura di questo triangolo, uopo è di calcolare la quadratura del settore EACB, che è minore del semicerchio. Per ritrovarla, si misuri prima l'angolo al centro AEB, e sia di 120 gradi; indi si deve sapere il raggio EA, il quale si trova di $63 \frac{1}{2}$ presso a poco, giacchè del triangolo rettangolo EAF ne sappiamo il cateto EF di 32, ed il cateto AF di 55, come metà di tutto AB. Fatto questo, raddoppiando il raggio EA, avremo l'intero diametro di 127, e perciò la circonferenza sarà $399 \frac{1}{2}$, e quindi la quadratura intera del piano circolare si troverà di $12,675 \frac{1}{2}$. Questa quadratura si moltiplichi pe' gradi, e minuti dell'angolo E al centro, o sia per i gradi, e minuti dell'arco ACB, ed il prodotto 1,520,820 si divida pe' gradi 360 della intera circonferenza, ed il quoziente $4224 \frac{1}{2}$ sarà la quadratura del settore, che si cerca.

Finalmente se dalla quadratura ritrovata del settore EACB di $4224 \frac{1}{2}$ se ne sottragga la quadratura del triangolo isoscele EAB di 1760, il residuo 2464 $\frac{1}{2}$ sarà la quadratura del segmento minore ACB, che si cercava.

2. Sia per secondo caso da calcolarsi la quadratura del segmento ADB maggiore del semicerchio. Per ritrovarla si faccia così. Restando i medesimi dati in questione, si faccia la quadratura dell'intero piano circolare $12,673 \frac{1}{2}$, ed indi la quadratura del segmento minore $2464 \frac{1}{2}$. Finalmente sottratto il segmento minore da tutta la quadratura del piano circolare, il residuo 10,209 sarà la quadratura del segmento maggiore.

10. *Misurare la quadratura di un trapezio Capotagliato.* Poichè i trapezi capotagliati possono essere, o rettangoli, ovvero obbliquangoli, così due casi possono accadere pel calcolo della di loro quadratura.

1. Sia per primo caso da ritrovarsi la quadratura del capotagliato BC rettangolo in D, ed in B. Per calcolarla, cglì Fig. 58 è necessario di sapere in misure i due lati opposti paralleli, e l'altezza perpendicolare tra i medesimi. Sia dunque BA di 89, DC di 145, che sono i due lati opposti paralleli; e sia di più BD di 114, che è l'altezza perpendicolare rappresentata da un lato stesso del capotagliato. Fatto questo, per calcolare la quadratura, si faccia così. Si sommino insieme i due lati paralleli BA di 89, DC di 145, e la di loro somma 234 si moltiplichi per la metà 57 dell'altezza BD di 114, ed il prodotto 13338 sarà la quadratura cercata.

2. Sia per secondo caso da ritrovarsi la quadratura del capotagliato AD obbliquangolo. Sieno intanto i due lati opposti paralleli AB di 82, CD di 146; ma perchè in questo Fig. 59 capotagliato obbliquangolo, l'altezza non può essere uno de' lati, comechè obbliqui a' primi, perciò quest'altezza bisogna tirarla, e misurarla da un lato perpendicolarmente all'altro lato opposto parallelo. Questa perpendicolare, o sia l'altezza, può cadere, o dentro del capotagliato, ovvero fuori, e l'operazione è sempre la stessa. Sia dunque quest'altezza AE di 100. Per avere la quadratura, si sommino insieme i due lati opposti paralleli AB di 82, CD di 146, e la di loro somma 228 si moltiplichi per la metà 50 dell'altezza AE di 100, ed il prodotto 11400 sarà la richiesta quadratura del capotagliato obbliquangolo.

11. *Misurare la quadratura di un Trapezio irregolare colla riduzione interna.* Per avere la quadratura di qualsivoglia trapezio irregolare, o il medesimo sia ad angoli sporgenti, ovvero ad angoli rientranti, si usa sempre il metodo di ridurre il trapezio in figure regolari, le quali sono, o pa-

rallelogrammi rettangoli, o triangoli rettangoli, o capotagliati rettangoli. Questa operazione intanto può eseguirsi in tre differenti modi, o che la riduzione si faccia tutta dentro del trapezio, quando il medesimo sia tutto accessibile, e così la somma delle particolari quadrature sarà la quadratura dell'intero trapezio; o che la riduzione si faccia tutta fuori, quando il trapezio fosse inaccessibile al di dentro, circoscrivendo al trapezio un parallelogrammo rettangolo, dalla di cui intera quadratura sottrattane la quadratura esteriore, il residuo sarà la quadratura del trapezio; o finalmente la riduzione si potrà fare, parte da dentro, e parte da fuori del trapezio dato, comechè sia in parte accessibile, ed in parte inaccessibile, e quindi dalla somma di tutte le particolari quadrature sottrattane la somma delle esteriori quadrature, il residuo darà la quadratura intera del trapezio dato. Ora tutto questo artificio, che useremo per la quadratura de' trapezi secondo le tre maniere indicate, si dice *Riduzione interna*, *Riduzione esterna*, e *Riduzione mista*. Eseguiremo tre casi per queste tre diverse riduzioni, acciò meglio si capisse il meccanismo di sì fatte operazioni.

Fig. 60 Sia da ritrovarsi la quadratura del trapezio irregolare AE colla riduzione interna. Ogni qual volta si voglia ridurre un trapezio, egli è indispensabile, che le linee occulte della riduzione, che si tirano, e si misurano, debbano formare sempre figure, che abbiano l'angolo retto, e queste possono essere, o parallelogrammi rettangoli, o capotagliati rettangoli, ovvero triangoli rettangoli. Per eseguir tutto questo, si scelga ad arbitrio il lato GF, su del quale deve poggiare tutta la riduzione. Da un estremo G si tiri la perpendicolare occulta GI, e dall'altro estremo F si tiri l'altra perpendicolare occulta FH; e poichè questa è più corta della prima, perciò s'innalzi da H la perpendicolare HK, e colla medesima avremo il primo parallelogrammo rettangolo GH. Di poi dall'angolo A si tiri la perpendicolare AO sopra la GI; e sopra la medesima si tiri l'altra perpendicolare CL dall'angolo C, e con queste due perpendicolari avremo quattro triangoli rettangoli. Dippiù dall'angolo E si tiri la perpendicolare EN sopra FH, ed avremo due altri triangoli rettangoli. Finalmente dall'angolo D si tiri la perpendicolare DM sopra KH, ed avremo un altro triangolo rettangolo, ed un capotagliato rettangolo. In questo modo tutto lo spazio del dato trapezio resta diviso in un parallelogrammo rettangolo, in un capo-

tagliato rettangolo, ed in sette triangoli rettangoli. Si misurino tutte le linee tirate per la riduzione, e si notino a fianco di ciascheduna, affinchè possiamo speditamente calcolare la quadratura di ciascheduna figura. Fatto questo si avrà la quadratura del parallelogrammo GH di 7100, del capotagliato MI di 588 $\frac{1}{2}$; del triangolo GOA di 1325, del triangolo AOB di 742, del triangolo BLC di 572, del triangolo CLI di 209, del triangolo DMH di 1740, del triangolo HNE di 351, e del triangolo ENF di 999. Si sommino tutte queste quadrature, e la somma 13626 $\frac{1}{2}$ sarà la intera quadratura del proposto trapezio.

12. *Misurare la quadratura di un Trapezio irregolare colla riduzione esterna.* Si da misurarsi colla riduzione esterna la quadratura del trapezio irregolare CF. Si scelga da prima il lato DE, su del quale deve poggiare tutta la riduzione esterna. Dal punto E si tiri a dirittura EL tanto lunga, finchè collineando l'estremo punto visibile F, faccia colla retta LF l'angolo retto in L. Di poi dal punto D si tiri in diretto la linea DK tanto lunga, finchè, collineando l'altro estremo visibile C, faccia, colla retta KC, l'angolo retto in K. Queste due rette KC, LF si allunghino in diretto sino ad H, ed I, in maniera che la retta HI tocchi l'altro punto estremo visibile A, e che faccia co' due punti H, ed I anche l'angolo retto. Di qui nasce, che siccome HI resta uguale e parallela a KL, così la retta KH sarà anche uguale e parallela ad LI. Eseguito tutto questo, il trapezio dato resterà racchiuso, e circoscritto dal parallelogrammo rettangolo HKLI. Fig. 6.

Inoltre le porzioni esteriori CHAB, AGFI, FEL, DCK, perchè sono porzioni fuori del campo del trapezio, così noi con un nome generale le chiameremo sempre in appresso *Stranieri*. Ora i due stranieri CKD, ELF, perchè sono triangoli rettangoli, i medesimi restano così; ma gli altri due stranieri CHAB, AGFI si debbono ridurre a figure regolari calcolabili colle perpendicolari NB, MG tirate agli angoli B, e G, ed in questo modo avremo tutt'i pezzi stranieri ridotti a quattro triangoli rettangoli, ed a due capotagliati rettangoli.

Disposto tutto così, si misurino tutti i lati occorrenti di questi pezzi stranieri, affinchè si possa avere la quadratura di ciascheduno di essi. Quindi sarà la quadratura del triangolo CKD di 528, del triangolo CNB di 352, del capota-

gliato BH di 2580, del triangolo AMG di 1377, del capotagliato GI di 1455, e del triangolo FEL di 1558. Si sommino tutte queste straniere quadrature, ed il risultato 7850 si noti a parte. Finalmente si prenda la intera quadratura di tutto il parallelogrammo KI, moltiplicando il lato KL di 154 pel lato KH di 128, ed avremo il prodotto intero 19712, dal quale si sottragga la quadratura straniera 7850, ed il residuo 11862 sarà la quadratura del proposto trapezio.

15. *Misurare la quadratura di un Trapezio irregolare colla riduzione mista.* Sia da misurarsi colla riduzione mista la quadratura del trapezio irregolare BH. Si stabilisca il lato BC, sopra del quale dovrà poggiare tutta la riduzione mista. Dal punto C si tiri la perpendicolare CE, finchè s'incontri coll'angolo E. Da questo punto E s'innalzi la perpendicolare EO, ed il lato CB si prolunghi in diretto in N, finchè unendo ad angoli retti gli estremi N, ed O colla retta NO, la medesima tocchi l'estremo A del trapezio; e di poi la porzione CDÈ si divida in due triangoli rettangoli colla perpendicolare DV. Inoltre la retta OE si prolunghi in P, in maniera, che s'incontri colla prolungazione FP ad angolo retto in P; e di poi dall'angolo estremo G s'innalzi la perpendicolare GM tanto, che da questo punto M si collinei il punto K colla retta MKL, la quale deve fare in M, e in L l'angolo retto. Dippiù la porzione KLR si divida in due triangoli rettangoli colla perpendicolare IQ, e la porzione SHG parimenti va divisa colla perpendicolare NH in due triangoli rettangoli. Fatta questa riduzione mista, si misurino tutt' i lati occorrenti per avere la quadratura di ogni pezzo in particolare.

Questa riduzione mista essendosi fatta principalmente con due parallelogrammi CO, PM, e con molti triangoli rettangoli, che sono d'intorno a ciascheduno di essi, così si scorre chiaro, che que' pezzi triangolari che sono fuori del campo del trapezio, sono gli stranieri, e quegli altri triangoli che sono dentro del trapezio, sono quelli, che noi diremo sempre in appresso *pezzi interiori*. Ora egli è facile di capire, che le quadrature de' pezzi stranieri non entrano a far parte della quadratura del trapezio dato, ma le quadrature de' pezzi interiori entrano nella somma della quadratura, che si cerca sapere.

Per calcolare adunque la quadratura del dato trapezio, si trovi prima la quadratura del parallelogrammo CNOE, la

quale sarà 10656. Fatto questo, si trovi la quadratura degli stranieri BNA di 1276 $\frac{1}{2}$, ed AOT di 336, i quali uniti insieme sono 1612 $\frac{1}{2}$. Questa somma straniera si sottragga da 10656, ed il residuo 9043 $\frac{1}{2}$ darà la quadratura netta di quella parte del parallelogrammo, che resta dentro del trapezio, e la quale si noti a parte. Dopo questa prima operazione, si trovi la quadratura degli altri pezzi triangolari interiori, che si debbono aggiungere alla quadratura netta del trapezio. Quindi si trovi la quadratura del triangolo di CVD di 630, e quella del triangolo DVE di 1035. Queste quadrature si noteranno a fianco della ipotenusa di ciaschedun triangolo interiore, giacchè per gli stranieri non occorre notarle, essendosi notata la quadratura *netta*, residua del parallelogrammo.

La esposta operazione nel primo parallelogrammo si dovrà ripetere pel secondo LPGM, del quale la intera quadratura sarà 18150. Ora togliendo dalla medesima la quadratura dello straniero EPF di 2502 $\frac{1}{2}$, e quella dell'altro straniero RMS di 577 $\frac{1}{2}$, il residuo 15070 sarà la quadratura netta, residua del parallelogrammo, che entra nel trapezio, e che si noterà a parte. Inoltre si trovi la quadratura de' triangoli interiori, che si dovranno poi sommare nel totale, e che si noteranno a fianco delle rispettive ipotenuse, e così sarà TLK di 280, KIQ di 600, IQR di 337 $\frac{1}{2}$, SNH di 1104, ed HNG di 1008. Quindi unendo insieme la quadratura netta del primo e del secondo parallelogrammo, e le quadrature di tutti i triangoli interiori, la somma totale 29108 rappresenterà la quadratura del proposto trapezio.

14. *Misurare la quadratura di qualsivoglia figura, che abbia un lato curvo.* La misura della quadratura di quella specie di figure, le quali abbiano un lato curvo, si eseguisce nel modo istesso delle figure rettilinee. La sola differenza, che intercede tra l'una e l'altra pratica, consiste solamente, che le rette tirate, o sieno le toccature per la riduzione nel lato curvo, si menano a più piccola distanza tra di loro, affinchè poi l'errore minimo, che nasce dal calcolo della curvità, resti vieppiù insensibile. La curvità de' lati inoltre può essere, o al di dentro, o al di fuori, o finalmente serpeggiante, in cui si ha l'una e l'altra curvità. Daremo adunque un esempio di quest'ultima specie, acciò si veggia il metodo da osservarsi in caso di simil guisa.

Sia da prendersi la quadratura di una figura mistilinea

Fig. 63 AT, che abbia un lato serpeggiante. Si scelga il lato VA, su del quale deve poggiare la riduzione. Dall'estremo A si tiri la perpendicolare AB, la quale s'incontra col prolungamento del lato DB ad angolo retto in B, ed avremo il primo triangolo rettangolo ABD. Indi il lato DB si tiri in diretto sino a C, e poi la perpendicolare CE. Dal punto E si tiri l'altra perpendicolare EM, e le piccole perpendicolari FG, HI, KL, MN, dalle quali nasceranno tre capotagliati, ed un triangolo rettangolo. Finalmente dal punto N si tiri l'altra perpendicolare NS, e le due altre piccole perpendicolari OP, QR, dalle quali nascono un triangolo, e due capotagliati. Fatto questo, si misurino tutti i lati occorrenti, ed avremo le seguenti quadrature. Per ABD sarà 630, BCE di 189, EFG di 110 $\frac{1}{2}$, FI di 292 $\frac{1}{2}$, HL di 336, KN di 331 $\frac{1}{2}$, NOP di 171, OR di 225 $\frac{1}{2}$, QT di 225, il rettangolo fatto da VA in AB, di 6240, il rettangolo fatto da CE in CX di 2727, ed il rettangolo fatto da MN in MZ di 760. Ora la somma di tutte in 12238 sarà la quadratura generale, che senza error sensibile, può darsi al trapezio curvilineo proposto.

15. *Misurare la quadratura di una superficie convessa, ovvero concava.* Poichè i metodi finora esposti per la quadratura suppongono sempre una superficie piana, o presso a poco tale, non così poi avvenir suole per la quadratura delle superficie assai gibbose, come sono i colli, ed i monti, ovvero assai concave, come sono le valli, nelle quali si usa un metodo differente, che noi diciamo *metodo delle Croce*. Questo metodo intanto, egli è d'avvertirsi, che si possa usare ogni qualvolta la superficie convessa, o concava sia di picciola estensione, giacchè ne' gran monti, e nelle grandi valli si usa il metodo generale di già esposto. Sia dunque da ritrovarsi la quadratura della superficie convessa della picciola collina I.

Fig. 64 si formi il parallelogrammo rettangolo ABCD, facendo così. Si ponga lo squadro in A, e colle linee de' quadranti si collinei AB, AC, e si misuri AB di 131, AC di 89. Nel punto B collo squadro si collinei BD uguale ad AC, e finalmente DC uguale ad AB. Fatto questo si scelga il punto G, nel quale posto lo squadro si collinei il più alto punto visibile I della collina, e misurando la visuale gibbosa GI di 60, si percorra, portando a squadro, nella stessa direzione il resto IE, collineando collo squadro in I il punto E, e si avrà IE di 54. Inoltre nel lato AC si scelga il punto F, nel quale posto lo

squadro si collinei il punto più alto visibile I, e portando a squadra la visuale, si misuri la curva FI di 80, ed in I situato lo squadra, si collinei il resto della visuale curva IH di 76.

Eseguita così la croce, cgli è facile calcolare la superficie convessa della collina, facendo così. Il lato AB di 131 si unisca col lato FIH di 156, e della di loro somma 287 se ne prenda la metà 143 $\frac{1}{2}$. Questa metà rappresenta un lato immaginario, più lungo di AB, e più corto di FIH, e perciò si chiama *lato medio*, e si noti a parte. Inoltre sommando il lato AC di 89 col lato EIG di 114, e della di loro somma 203 si trovi l'altro lato medio 101 $\frac{1}{2}$, o sia la metà, e si noti a parte. Fatto questo, si moltiplichino un lato medio 143 $\frac{1}{2}$ per l'altro lato medio 101 $\frac{1}{2}$, ed il prodotto 14565 $\frac{1}{4}$ sarà la quadratura della superficie convessa della collina, che si cercava sapere.

Per misurare una superficie concava di una picciola valle, si opera nel modo istesso, facendo uso del metodo della croce nella concavità, e poi ritrovando i lati medi, questi si moltiplichino tra di loro, ed il prodotto sarà la quadratura della superficie concava della picciola valle. Avvertasi intanto, che qualora occorresse, ci serviremo non di una croce, ma di molte per ritrovare la quadratura o di un monte, o di una valle. Del resto, sebbene questo metodo si usasse in pratica, pur tuttavia non può essere garante per la esattezza del risultato, poichè sempre qualche piccolo errore nella quantità si ottiene, trattandosi di superficie curve sensibilmente.

§. II.

La Configurazione.

L'artificio, che abbiamo avuta cura di minutamente esporre per la riduzione de' trapezi, per indi ricavarne la di loro quadratura, ci farà essere speditissimi in quell'altra specie di pratica, che da noi si dice *configurazione*, la quale consiste non solo nel saper rilevare le piante de' territorii nella campagna, ma benanche di porre in esecuzione cogli strumenti ogni riduzione, che potrà adattarsi alle figure, che nella campagna istessa si ritrovano. Eseguiremo il tutto dettagliatamente colle regole seguenti.

1. *Configurare un Trapezio colla riduzione interna.*

Fig. 65 Quando un trapezio, rappresentante qualunque territorio, sia tutto accessibile da dentro, e nell'ambito, in questo caso per risparmio di fatica, si configura colla riduzione interna, facendo così. Sia il trapezio AD del quale si deve far la pianta. Poichè è tutto accessibile da dentro, e ne' lati, si ponga nell'angolo F lo squadro, e colla linea de' quadranti si collinei la visuale FG, mettendo a squadro sì fatta linea di cammino con tutte quelle diligenze altrove enunciate; indi si cammini FM tanto, finchè fissando in M lo squadro, coll'altra linea de' quadranti si volti a squadro, e si collinei il punto E per avere la toccatura ME. Si misuri FM, ed ME. Dal punto M si continui a camminare la visuale MG, finchè da questo punto G, voltandosi a squadro, coll'altra linea de' quadranti si collinei il punto A. Si misuri MG. Indi misurando la visuale GA, si noti il punto K, in dove voltandosi a squadro, si collinei il punto B, e si misuri KA, KB. Nel punto B posto lo squadro, e riconoscendo la direzione di BK, coll'altra linea de' quadranti si collinei la visuale indefinita BI, e fino ad I si misuri. In I posto lo squadro, si riconosca da una parte IB, e dall'altra s'incontri il punto C, e si misuri IC, e continuando la visuale CI sino ad H, si misuri HI. Di poi da H voltandosi a squadro, si collinei il punto D, ma arrivato nel punto L si volti di nuovo a squadro, per incontrare il punto E. Si misuri HL, LD, ed LE. Arrivato in E, e mettendo a squadro la linea percorsa EL, si dovrà incontrare coll'altra linea de' quadranti la direzione EM, per esser sicuri della esattezza della operazione fatta nel trapezio dato.

Per formare nello sbozzo di campagna la pianta del trapezio, che si riconosce, si avrà l'avvertenza, che a proporzione, che si misurano le linee del cammino, si debbano segnare occultamente sulla carta con tutti quegli angoli, e tocature, che occorreranno, e dopo terminato tutto il cammino, dagli estremi di queste linee si tirano colla penna le linee tutte nere, le quali costituiranno la figura, che rappresenta il dato trapezio.

Dopo che tutto questo si sia eseguito, si vede chiaro, che la quadratura si ottiene sempre in seguito della configurazione; dapoichè le linee occulte, che si tirano, e si misurano, sono le istesse, che le linee visuali, mediante le quali configurandosi un trapezio, viene per necessità ad essere diviso in tante figure regolari, dalla quadratura delle quali si ottiene la quadratura totale del trapezio. Quindi per

quadrare il descritto trapezio, di cui si conoscono tutte le linee della riduzione, si faccia così. Si calcoli il triangolo BIC di 864, il triangolo CHD di 800, il triangolo DLE di 590 il triangolo EMF di 660, il triangolo FGA di 2007 $\frac{1}{2}$, il triangolo AKB di 532, il rettangolo fatto da KB in BI di 5376, il rettangolo fatto da GM in ME di 1980, e finalmente il rettangolo fatto da HL nel residuo di LE di 680. E perchè questa riduzione è tutta interna, perciò la somma 13489 $\frac{1}{2}$ sarà la quadratura intera del trapezio.

Per orientare questa pianta, noi sceglieremo il lato ED, come più diretto verso il Nord. Ponendo la bussola sul medesimo, di modo che il meridiano del disco sia nello stesso sito del lato, supponiamo, che l'ago declini 4° all'Ouest del meridiano del disco, o sia del lato, che si orienta; e di più che l'ago abbia 8° di variazione Est. Poichè questi due termini sono dissimili, perciò si sommino, ed avremo 12°; e perchè l'ago declina all'Ouest del meridiano del disco, perciò la linea NS si segnerà per 12° all'Ouest del lato orientato.

2. *Configurare un Trapezio colla riduzione esterna.*

Usiamo la esterna riduzione nella configurazione di tutte quelle piante, le quali non permettono la riduzione interna, come sono i boschi, i laghi, ed altro simile. Sia il trapezio AH da configurarsi colla esterna riduzione. Si scelga il punto H, in cui situato lo squadro, si collinei, e si misuri HI, finchè in I coll'altra linea de' quadranti, voltandosi a squadro, si vegga il punto K. Indi si collinei, e si misuri HG, finchè coll'altra linea de' quadranti, voltandosi a squadro, si vegga il punto F, e si misuri GF. Giunto in F, si continui a misurare la quadrante FE, e nel punto E voltandosi a squadro, si misuri la toccatura EP. Di poi si prosegua la misura per ED, e quivi si faccia l'altra toccatura DO. Finalmente si arrivi in B, misurando DB, e quivi si mette a squadro tutta la quadrante BG, per vedere se siasi camminato a dovere. Non movendo in B la situazione dello strumento, coll'altra linea de' quadranti, s' incontri l'estremo A, e misurando BA, si prosegua a portare a squadro la linea per AC colla misura. Giunto in C, e riconoscendo la linea percorsa CB con una visuale dello squadro, coll'altra poi si deve collineare, ed incontrare il punto K, ed il principio I della riduzione. Fatto questo si misuri CL, e quivi la toccatura LM, indi si misuri LK, e finalmente KI, in dove col

Fig. 66

mettersi a squadra in I, debbono riconoscersi la linea percorsa IC con una visuale, e coll'altra, traguardarsi la linea IG, ed in questo modo avremo chiusa la figura, e percorso esternamente tutto il trapezio. Lo sbizzo di campagna, che serve per la pianta rappresentante il territorio, deve farsi colle stesse regole dianzi esposte.

Per avere la quadratura di sì fatto trapezio, bisogna prima quadrare il rettangolo intero GC, che sarà, 27384, dal quale si debbono togliere tutti gli stranieri, che sono i seguenti. Il capotagliato AODB di 1440, il capotagliato DOPE di 1890, il triangolo FEP di 304, il triangolo FGH di 1387½, il triangolo HIK di 2332, il triangolo KLM di 1232½, ed il capotagliato LCAM di 2160. La somma di tutti questi stranieri 10746 sottratta dall'intero rettangolo, il residuo 16638 sarà la quadratura netta del proposto trapezio.

Per orientare questa pianta, si scelga il lato KM. Si ponga in K la bussola, e situando il meridiano del disco sul lato collineato, supponiamo, che l'ago declini 6° all'Est del medesimo, ed intanto abbia di variazione 8° all'Est. Poichè questi termini sono simili, così si sottraggono, ed il residuo 2° darà la distanza angolare della linea NS all'Ouest del lato orientato.

3. *Configurare un Trapezio colla riduzione mista.* Ogni qualvolta un trapezio in qualche sua parte ci permetta l'accesso al di dentro, noi porremo in pratica la mista riduzione, facendo così. Sia il trapezio BG da configurarsi colla mista riduzione. Si ponga lo squadra in A, e con una sua quadrante si collinei la visuale AC, e camminando per la medesima si misuri AL, ed in L fermato lo squadra si traguardi la linea percorsa, e non movendo lo strumento, si volti a squadra per incontrare il punto B, e misurare la toccatura LB; indi si prosegua a misurare LK, ed indi KC. Giunto in C si fermi lo squadra, e si riconosca la quadrante CA con una sua visuale, e poi coll'altra si volti a squadra per determinare l'altra quadrante CF, che si deve camminare. Si cammini dunque, e si misuri CD, indi DP, ed in P voltandosi a squadra si misuri la toccatura PE. Fatto questo, si prosegua a misurare PT, e finalmente TF. In questo punto F posto lo squadra, e riconosciuta la linea percorsa FC con una visuale, coll'altra si collinei il punto G, continuando la visuale sino ad H, donde possa incontrarsi a squadra il principio A, dove s'incomincia la mi-

Fig. 67

sura dell'ultima quadrante HA. Quindi si misuri HO, poi OM, e nel punto M voltandosi a squadra si misuri la toccatura MI. Finalmente si termini la misura col cammino di MA, e così chiuderemo il giro del trapezio. Lo sbizzo di campagna si fa nel modo istesso, che dianzi abbiamo descritto.

Per avere la quadratura di sì fatto trapezio, si calcoli primieramente il rettangolo ACFH di 20016, da cui si debbono togliere i tre stranieri triangoli DCK di $604\frac{1}{2}$, TFG di $1592\frac{1}{2}$, GHQ di 2528, i quali presi insieme sono 4725. Questa somma sottratta dall'intero 20016, il residuo 15291 sarà la quadratura netta. Ora ci sono sei altri triangoli, che si debbono aggiungere, come pezzi interiori, e sono ALB di 1209, BLK di 260, DPE di 231, EPT di $49\frac{1}{2}$, OMI di 112, ed MIA di 488, i quali presi insieme fanno 2349 $\frac{1}{2}$. Unendo dunque questa somma alla prima somma netta, avremo $17640\frac{1}{2}$ per la intera quadratura del dato trapezio.

Per orientare questa pianta, si scelga il lato IA. Adattata dunque la bussola come conviene, situando il meridiano del disco sul lato, che si orienta, e supponiamo, che l'ago declini 12° all'Est, avendo di variazione 8° anche all'Est. Poichè i termini sono simili, si sottraggono, ed il residuo 4° darà l'angolo della linea NS all'Est del lato orientato.

Fin qui abbiamo conosciuto necessario lo esame, e la esposizione di tutti i metodi per misurare le linee di qualunque specie, per quadrare la superficie, e per configurare i territorii, e le cui regole esposte le stimiamo sufficientissime per eseguire non solo nel disegno, ma nella campagna altresì, ogni problema di questo genere. Intanto non dobbiamo tacere quelle necessarie avvertenze, e giuste riflessioni, che si possono fare nel pratico esercizio di queste operazioni, e che derivano inevitabilmente dal meccanismo delle medesime.

In primo luogo egli è a sapersi, che nelle configurazioni de' territorii, specialmente di grande estensione, sempre si deve usare il metodo di formare intorno a' medesimi un parallelogrammo rettangolo, ogni lato del quale sarà sempre una quadrante dello squadro, e nello scorrere ciascheduna di queste accade, per lo più, di dover misurare le toccature per tutti gli angoli, che presenta la irregolarità della figura. Egli è vero, che il meccanismo dello squadro deve portare per necessità l'esatta chiusura del parallelogrammo,

quando si va ad incontrare coll' ultima quadrante il principio della prima, giacchè i lati opposti de' parallelogrammi sono uguali, e paralleli, pur tuttavia in pratica avvenir suole, che si fatto preciso incontro rare volte si ottiene, ritrovandosi spesso una quadrante, o più corta, o più lunga della sua opposta. Questo inconveniente si dice da' pratici *Sparallelo*, e questo deve nascere inevitabilmente dalla irregolarità del suolo, su del quale si misura la linea del cammino. Quando il suolo sia bastevolmente piano, o le quadranti sieno lunghissime, e lo sparallelo si trovasse di poco momento, allora possiamo contentarci della esattezza delle misure, ed averle per buone; ma qualora poi in sì fatte circostanze lo sparallelo fosse assai sensibile, in questo caso si deve ragionevolmente dubitare di errore. Porterebbe della pena in verità, che nelle grandi estensioni, ritrovandosi uno sparallelo insopportabile ne' luoghi piani, si dovesse tornare da capo, e ricominciare le misure delle quadranti del parallelogrammo di riduzione. Quindi i pratici, per essere sicuri di non cadere in error sensibile, usano la diligenza, che dopo di aver percorsa la prima quadrante, nello scorrimento poi della seconda, che si unisce ad angolo retto colla prima, dopo un cammino sensibile per la medesima, si voltano a squadro, e pereorrono una parallela alla prima, per vedere se si trovi della medesima lunghezza presso a poco. Questo artificio si dice *Rendere la parallela*. Assicurati di questo, finiscono la misura della seconda quadrante, e debbono incominciare la terza. Nello scorrere questa, dopo di essersi avanzati nella medesima, si voltano a squadro, e rendono la parallela alla seconda quadrante, affinchè veggano, se le quadranti vadano a doverc. Fatto questo, si termina la terza quadrante, e si vede se vi sia sparallelo relativamente alla prima, ed alla parallela di prova. Se il tutto vada sopportabilmente esatto, si misura l' ultima quadrante, nel fine della quale si dovrebbe incontrare a squadro la prima.

Ne' luoghi assai disuguali di superficie, come sono le montagne, e le valli, non è sperabile di ottenerc il preciso parallelismo, nè è pretendibile. Li quattro quadranti del parallelogrammo di riduzione si troveranno sempre sparalleli tra i lati opposti, per cui i pratici, nel calcolarlo, usano di ritrovare tra questi il lato medio, e così ottenerne la prossima quadratura, come quella, che senza error sensibile, può stimarsi per esatta.

In secondo luogo, poichè si misurano effettivamente tutte le linee della riduzione, in seguito della quale ne nasce la quadratura, così ne segue, che con sì fatto artificio si ha l'effettiva quantità della superficie di un dato territorio. Imperciocchè mettendo a misura tutte le gibbosità, e depressioni del terreno, sulle quali si percorrono le linee di cammino, forza è, che il risultato di tutte queste debbano dare la vera quantità della superficie. Intanto questa vera quantità superficiale non potrà mai essere rappresentata da quella figura, esprimente la pianta, che si descrive in disegno sulla carta. La ragione di tutto questo è chiara a concepirsi. Supponiamo un territorio ondeggiente, e disuguale nella superficie per le elevazioni di colline, e depressioni di valli, e che questo territorio sia circoscritto da confini distinti, e determinati. La sua vera figura, rappresentabile in disegno, sarebbe quella, che noi scorgeremmo, se elevati a qualche altezza nell' Atmosfera guardassimo a perpendicolo sul medesimo territorio sottoposto. Allora tutte le sgolbature, e concavità svanirebbero, ed ogni cosa ci apparirebbe come un piano perfetto, e gli angoli formati dalla unione de' lati ci darebbero una certa grandezza, che si osserverebbe dall' occhio elevato. Ma poichè sulla carta, che è un piano perfetto, noi dobbiamo situare anche in rettilineità quelle linee del cammino, che si sono percorse sulla gibbosità, e depressioni, così queste istesse diventeranno in proporzione più lunghe delle altre, che si sono percorse sul suolo piano. Quindi nasce, che siccome la figura rappresentante la pianta, deve farsi colle linee sane, che sono i confini del territorio, che si tirano dagli estremi delle linee del cammino, così questi ultimi lati della circoscrizione della pianta non si uniranno tra di loro con quella apertura angolare, che si osserverebbe dall' alto, e perciò la pianta formata non può rappresentare la vera ed esatta figura del territorio, sebbene ne contenesse la vera quadratura della sua superficie.

In terzo luogo egli è da riflettersi, che se in un dato territorio limitato, e circoscritto da' suoi confini vi sia una elevatura sensibile, come una montagna ripida, e scoscesa, egli è certo, che la sua vera superficie, o sia la pelle sarà sempre più grande della superficie della sua base, che è un piano perfetto, circoscritto da' medesimi confini. Quindi misurandosi la sola base piana, e misurandosi la sua super-

ficie gibbosa, si ritroverà senza dubbio la quadratura di quest'ultima, molto più grande della quadratura della prima. Si crederebbe perciò, che un sì fatto territorio avesse una quantità di superficie maggiore di quello, che porterebbe, o si potrebbe contenere tra i suoi confini, e servibile ad un uso maggiore. Se intanto noi vogliamo riflettere all'uso di questa quantità maggiore di superficie ripida, relativamente alla minore quantità della base, ritroveremo, che sì fatta quantità maggiore della superficie inclinata sia una cosa immaginaria, ed inutile interamente ad un uso più esteso della base. Ognuno sa, che tutti i corpi della natura hanno la di loro gravità, la quale si dirige sempre per una linea perpendicolare alla superficie della Terra. Quindi avviene, che nelle superficie inclinatissime, due corpi situati sul declivio medesimo, sebbene avessero tra di loro una data distanza, le di loro basi però saranno disposte per un intervallo maggiore, espresso dal declivio della superficie inclinata intermedia; e se in sì fatte circostanze non si può intronettere un terzo corpo tra i due primi, perciò resterà inutile la lunghezza dell'intervallo della superficie inclinata tra la base del primo, e quella del secondo, sebbene sia più lunga. Sia

Fig. 68 AB un pezzo piano della superficie terrestre, rappresentante la base di un monte; e sia BC una delle sue falde inclinate. Egli è sicuro, che l'estremo C corrisponde a perpendicolo in A, per cui si forma il triangolo CAB rettangolo in A. Ora egli è incontrastabile, che la inclinata CB sia assai più lunga della orizzontale AB; e ciò non ostante l'uso, che noi possiamo fare di questa inclinata più lunga CB, non è maggiore dell'uso, che si può fare della orizzontale assai più corta AB, che anzi questi usi sarebbero uguali. In fatti s'immagini nel punto D situato un muro di edificio, un albero, o altro simile corpo, la cui gravità lo fa dirigere a perpendicolo sul punto H. S'immagini posto un altro muro, o albero nel punto E, la cui gravità sarà espressa per EI. Lo intervallo FG, tra l'un corpo e l'altro, corrisponde ad Hf nella base, ma la distanza inclinata tra queste due basi DE è assai più lunga. Intanto se nell'intervallo FG non può situarsi un altro corpo, l'uso della estensione maggiore di DE resta inutile. Quindi l'uso di CD sarà uguale a quello di AH, e l'uso di EB uguale a quello di IB, e tutta la inclinata CB, assai più lunga, sarà uguale all'uso della orizzontale AB assai più corta, ed in

conseguenza la quantità maggiore di una superficie inclinata relativamente alla quantità minore della sua base, a cui corrisponde, resta per l'uso assolutamente inutile, ed immaginaria.

In quarto luogo finalmente egli è a considerarsi, che dopo di aver eseguito nella campagna il meccanismo di rilevare una pianta, e conoscerne la quantità superficiale, notando ogni misura delle linee di cammino, e segnando i confini con linee distinte nello sbizzo, tutto questo poi dovrà porsi in disegno col maneggio de' necessari strumenti altrove descritti, col situare tutte le linee a proporzione. Questa pratica si dice *Rimettere la Pianta*. Il disegno poi, che deve rappresentare l'oggetto rilevato nella campagna, egli è uno de' principali doveri degli Agrimensori, e deve farsi, per quanto sia possibile, esatto, e distinto. Per lo più suol farsi questa rappresentazione, segnando con linee intere tutti i confini, che racchiudono lo spazio del territorio; e quando il caso lo porta, o il bisogno lo richiede, si segnano benanche le linee occulte punteggiate, che sono quelle del cammino. Ma affinchè il disegno riuscisse di pregio maggiore, egli è mestieri, che si sappiano distinguere le differenti specie de' territorii, se sieno aratori, o pascolatori, se boscosi, o pantanosi, se collinati, o depressi, se vi sia un fiume, un edificio, ed ogni altra circostanza. Tutte queste cose per quanta perfezione conciliano alla rappresentazione, altrettanta stima procurano all'intelligente Agrimensore.

§. III.

La legazione.

Tutte le pratiche operazioni finora esposte ci hanno resi finalmente informati di ogni artificio, onde possiamo quadrare, configurare, e porre in disegno qualunque figura rappresentante un territorio. Alle volte però succede, che molti di questi territorii si trovano contigui l'un coll'altro, e noi dobbiamo non solo misurarne la di loro distinta quadratura, ma configurarli altresì, e disegnarli nella di loro rispettiva situazione, come si trovano nella campagna. Per far questo, noi ci serviremo delle solite quadranti dello squadro per la riduzione, la quale nel tempo istesso che sarà comune a

★

tutti i territorii, colle toccature particolari poi sapremo distinguere ciascheduno di essi. Questa operazione si dice *legazione*, poichè con una riduzione lega insieme tutti i corpi. Ne addurremo un esempio generale, adattabile ad ogni altra combinazione.

Fig. 69 Sia una estensione territoriale NA distinta in cinque corpi diversi da' propri confini. Si cerca con una sola riduzione misurarli tutti cinque, e distinguerli poi a proporzione nel disegno, affinchè possiamo conoscere di ciascheduno la propria quadratura, il sito e la figura. Si scelga il punto A, ed il lato AB, su di cui si debbono poggiare le quadranti della riduzione. Nel punto A si ponga lo squadro, e si collinei il lato AB con una sua visuale, ed avendo misurata AB, nel punto B si continui a portare a squadro, e misurare la visuale esterna BC sino al punto C, finchè coll'altra visuale dello strumento, voltandosi a squadro, s'incontri il punto D, e si misuri CD, come il principio dell'altra quadrante. Da D si prosegue a portare a squadro la quadrante, misurando sempre il cammino sino ad E, dove voltandosi a squadro, si misuri la toccatura ET; indi si prosegua per EF dove si farà l'altra toccatura FG. Seguitando il cammino della quadrante, si misura FH, indi HI, in dove si farà la toccatura IK; di poi si misuri IL, e finalmente si misuri l'ultima parte esterna LM della quadrante. Arrivato in M si riconosca colla visuale dello strumento la quadrante percorsa MC, e non movendo lo stesso, si volti a squadro, per incontrare il punto N coll'altra visuale, misurando il principio della terza quadrante MN, dove giunto, si continui la stessa sino ad O. In questo punto si riconosca collo squadro la quadrante percorsa OM; ed indi, voltandosi a squadro coll'altra visuale, s'incontri il punto P. Si misuri adunque il principio esterno della quarta quadrante OP, dove arrivato si prosegua per PQ, ed in questo punto Q, voltandosi a squadro, si misuri la toccatura QR, indi si misuri QS, in dove si faccia la toccatura ST, incontrando a dirittura TE, e tutta la lunghezza SE misurata potrebbe servire per una parallela di prova relativamente alla quadrante OM. Fatto questo, si prosegua per SV, in dove si faccia la toccatura VX; indi si misuri VY, e finalmente YZ. Arrivato in Z si pongano a squadro le due quadranti ZO, e CZA, per vedere se si sia bene condotta la operazione.

Eseguito il primo parallelogrammo della riduzione, si mi-

suri la continuazione ZA della prima quadrante. In A fissato lo squadro si riconosca la visuale AC, e voltandosi a squadro si collinei l'altra visuale indefinita AK, come rappresentante un'altra quadrante. Si misuri inoltre AE, in dove si faccia la toccatura EF, indi si misuri EG, di poi GH, in dove si misuri la toccatura HX, che deve incontrare la XV a dirittura, e tutta la lunghezza HV misurata, serve di parallela di prova relativamente ad AZ. Si prosegua a misurare HI, indi IK, ed in questo punto K si volti a squadro per incontrare l'ultimo estremo L, e misurando la toccatura KL, avremo terminata la intera riduzione per la legazione de' cinque corpi dati.

Dopo fatta la fatica di campagna, viene il calcolo. Lo sbizzo fatto nel tempo dell'operazione ci sarà di guida per rimettere la pianta con tutte le linee misurate, e con tutti i confini di ciascheduno de' corpi. Eseguito il tutto nel disegno, calcoleremo la quadratura di ciaschedun corpo in particolare, facendo così. Per il corpo ABXF si calcoli prima il parallelogrammo AHVZ, dal quale si deve togliere il triangolo GHX, e quello di XVY, al residuo che resta, si aggiunga il triangolo BZY, ed il triangolo GFA, e la somma nata darà la quadratura del primo corpo. Viene il secondo PXFL, di cui si calcoli prima il capotagliato FEKL, dal quale si sottrae il triangolo FEG, e quello di IKL, e si noti l'avanzo; poi si calcoli il capotagliato PVHL, da cui si toglie il triangolo PVX, ed al residuo si aggiunga il triangolo XHG, e la somma, unita all'antecedente, darà la quadratura del secondo corpo. Per il terzo corpo PXBDTR, si uniscano in una somma il triangolo PXV, il triangolo PQR, ed il capotagliato RQST, e questa somma si noti a parte; indi si calcoli il parallelogrammo ESZC, dal quale si sottrae il triangolo BZY, quello di BCD, e quello di DET, ed il residuo unito alla prima somma, darà poi l'intera quadratura del terzo corpo. Per il quarto corpo PNKR, si calcoli prima il parallelogrammo MOSE, dal quale poi si sottrae il triangolo TEH, quello di LMN, quello di NOP, quello di PQR, ed il capotagliato QRTS, ed il residuo si noti a parte; a questo poi si aggiunga il triangolo IKL, e tutta la somma darà la quadratura del quarto corpo. Finalmente viene il quinto corpo TKGD, di cui si uniscano in una somma il triangolo IT'D, il triangolo GFD, ed il capotagliato KIFG, dal quale tolto via il triangoletto KIH, il resto darà la quadratura del medesimo.

Ora l'unione di tutte le quadrature speciali de' cinque corpi darà la quadratura intera di tutto il trapezio NA, che lega insieme i corpi enunciati.

CAPO VII.

LA DIVISIONE

§. I.

La divisione ordinaria

Dopo che ci siamo istruiti di tutte le pratiche, che ci conducono a saper conoscere qualunque lunghezza, e di saper calcolare qualsivoglia superficie in misure quadrate, e di queste rappresentarne altresì la pianta in disegno, egli fa uopo di conoscere quell'altra speciosa parte di tutta l'agrimensura pratica, che ne sviluppa il modo, col quale possiamo dividere una superficie conosciuta, e che noi diciamo *divisione*, ovvero *geodesia*. Questa parte cotanto necessaria agl'interessi umani è stata per appunto quella, che specialmente abbiamo avuta cura di stabilirla tutta intera, giacchè la medesima, non sappiamo per qual cagione, sia stata totalmente trascurata da tutti gli altri Geometri, che ci hanno preceduti.

Intanto egli è a sapersi, che una figura qualunque può essere divisa in qualsivoglia modo, che a noi ne piaccia, o come il bisogno lo richiegga. Se le parti, nelle quali resta divisa la figura, abbiano un principio comune, si dice *divisione ordinaria*. Se poi queste porzioni sieno poste in diverse situazioni, si dice *divisione straordinaria*. Finalmente nelle divisioni qualche volta accade, che si tagliano i pezzi stranieri, i quali si debbono calcolare, e le regole adattate a questo maneggio, vanno sotto il nome di *intersecazione*. Eseguiremo sì fatte pratiche nelle regole seguenti.

1. *Data la quadratura di un parallelogrammo, ed un lato, ritrovare l'altezza.* Poichè i parallelogrammi possono essere rettangoli, ed obbliquangoli, così due casi possono accadere.

Fig. 70 Sia per primo caso il parallelogrammo rettangolo AD, del quale si sappia la sua quadratura 6370, ed un lato qualunque AB di 98, si cerca di sapere la sua altezza. Poichè que-

sto parallelogrammo è un rettangolo, perciò la sua altezza, che si cerca è la stessa, che l'altro lato BD adiacente al conosciuto. Per ritrovarlo, si divida la quadratura 6370 pel lato noto 98, ed il quoziente 65 sarà l'altezza, o sia il lato adiacente BD. In fatti se questi due lati si moltiplichino tra di loro, avremo la medesima quadratura.

Sia per secondo caso il parallelogrammo obliquangolo AD, Fig. 71
del quale si sappia la sua quadratura 4000, ed un lato qualunque AB, di 100, si cerca di sapere la sua altezza. Giacchè sì fatto parallelogrammo è obliquangolo, perciò la sua altezza non può essere un lato adiacente al conosciuto, ma deve essere la perpendicolare CE. Per ritrovarla, si divida la quadratura 4000 pel lato noto 100, e 'l quoziente 40 darà l'altezza CE, che si cercava di sapere.

2. *Data la quadratura di un triangolo, e la base, ritrovare l'altezza.* Poichè i triangoli possono essere rettangoli, acutangoli ed ottusangoli, perciò tre casi possono accadere.

Sia per primo caso il triangolo rettangolo ABC, del quale Fig. 72
si sappia la sua quadratura 3150, ed un cateto BC di 105, si cerca di sapere la sua altezza. Poichè questo triangolo è rettangolo, ed un cateto è conosciuto, come una base, perciò la sua altezza sarà quella stessa dell'altro cateto BA, che è l'altro lato adiacente al conosciuto. Per ritrovare questa altezza, si divida la quadratura 3150 per la metà $52\frac{1}{2}$ della base BC, ed il quoziente 60 sarà la lunghezza dell'altro lato, o sia l'altezza BA. In fatti moltiplicando la base per la metà dell'altezza, avremo la stessa quadratura.

Sia per secondo caso il triangolo acutangolo ABC, del quale Fig. 73
si sappia la sua quadratura 1750, e la base BC di 50, si cerca di sapere la sua altezza. Perchè questo triangolo è acutangolo, perciò la sua altezza non può essere un lato adiacente alla base, ma deve essere la perpendicolare interna AD. Per ritrovarla, si divida la quadratura 1750 per 25 metà della base BC, ed il quoziente 70 sarà l'altezza AD, che si voleva.

Sia per terzo caso il triangolo ottusangolo ABC, del quale Fig. 74
si sappia la sua quadratura 1200, e la base BC di 40, si cerca di sapere la sua altezza. Poichè sì fatto triangolo è ottusangolo, perciò la sua altezza non può essere un lato adiacente alla base, ma deve essere la perpendicolare esterna AD. Per ritrovarla, si divida la quadratura 1200 per 20, metà del-

la base BC, ed il quoziente 60 sarà l'altezza AD, che si voleva.

3. *Data la quadratura di un capotagliato, ed i due lati paralleli, ritrovare l'altezza.* Poichè i capotagliati possono essere rettangoli, ed obbliquangoli, perciò due casi possono accadere.

Fig. 75 Sia per primo caso il capotagliato rettangolo ABDC, di cui si sappia la sua quadratura 266, e si sappiano di più i due lati paralleli AB di 10, e CD di 28, si cerca la sua altezza. Poichè questo capotagliato è rettangolo, perciò la sua altezza è la medesima, che il lato CA perpendicolare a' due lati paralleli. Per ritrovarla, si faccia così. Li due lati paralleli AB di 10, e CD di 28 si sommino, ed avremo 38, la di cui metà 19 deve dividere la quadratura 266, e 'l quoziente 14 sarà l'altezza CA richiesta. In fatti se si moltiplichia la somma de' due lati paralleli per la metà dell'altezza, avremo la istessa quadratura.

Fig. 76 Sia per secondo caso il capotagliato obbliquangolo ABCD, del quale si sappia la quadratura 540, ed i due lati paralleli AB di 24, e CD di 30, si cerca la sua altezza. Per ritrovarla, faremo così. Poichè questo capotagliato è obbliquangolo, perciò la sua altezza non può essere un lato adiacente a' lati paralleli, ma deve essere AE. Quindi i due lati paralleli AB di 24, e CD di 30 si sommino, ed avremo 54, la cui metà 27 deve dividere la quadratura 540, ed il quoziente 20 sarà l'altezza AE, che si voleva.

Fig. 77 4. *Data la quadratura di un capotagliato, la sua altezza, ed un lato, ritrovare l'altro lato parallelo.* Sia il capotagliato ABDC qualunque, e del quale si sappia la sua quadratura 156, la sua altezza AC di 12, ed il lato CD di 18, si cerca di sapere l'altro lato AB parallelo a CD. Per ritrovare adunque il lato AB si faccia così. La quadratura 156 si divida per 6, che è la metà dell'altezza AC di 12, ed avremo per quoziente 26; da sì fatto numero si sottragga il lato CD di 18, ed il residuo 8 darà la lunghezza AB, che è l'altro lato parallelo, che si cercava. L'altezza che divide, si dice *Lato divisore*.

5. *Dato un parallelogrammo rettangolo noto, tagliarne una porzione in forma triangolare.* Diciamo esserci noto un rettangolo, quando del medesimo sappiamo non solo la quadratura del suo spazio superficiale, ma i due lati altresì, che l'hanno prodotta. Dippiù la porzione, che si

cerca di tagliare, essendo valutata in quadratura, perciò della medesima se ne forma un triangolo, da tagliarsi dal parallelogrammo, e questo tale triangolo dovrà essere rettangolo, il quale avrà i due cateti sopra due lati del parallelogrammo, e la ipotenusa, che sempre rappresenta quella linea, che divide la porzione tolta, si dirà sempre in appresso *Divisoria*, la quale incomincia da un angolo del parallelogrammo, e termina in un lato. Ora, nella risoluzione di questo problema, due casi possono accadere, o che la porzione, da tagliarsi, sia minore della metà del parallelogrammo, o che sia maggiore.

1. Sia per primo caso il parallelogrammo rettangolo AD, del quale si sappia il lato AB di 100, il lato BD di 70, e la sua quadratura 7000. Si cerca tagliare dal medesimo una porzione di quadratura 2000, che è meno della metà, tirando la divisoria dall'angolo B. Ora perchè 2000 è minore della metà di 7000, così noi dal punto B adatteremo la divisoria, che vada a terminare sul lato AC, e costituire un triangolo rettangolo BAE, che contenga di quadratura 2000. Per eseguire tutto questo, egli fa uopo riflettere, che noi abbiamo la quadratura 2000 del triangolo da tagliarsi, ed il lato noto AB di 100; altro dunque non ci resta di fare, che ritrovare la lunghezza dell'altro lato perpendicolare AE, nel di cui estremo E cade, e termina la divisoria, che si tira dal punto B. Quindi divideremo la quadratura 2000, da tagliarsi, per 50, metà del lato intero noto AB, ed il quoziente 40 darà la lunghezza AE dell'altro lato, o sia l'altezza, contata da A in E; onde tirando l'ipotenusa BE, la medesima sarà la divisoria, che taglia di tutto il parallelogrammo AD la porzione triangolare BEA, che si voleva.

Fig. 78

Intanto egli è da avvertirsi, che il lato AB, che fa il divisore della quadratura da tagliarsi, si dice da noi sempre in appresso *Lato di appoggio*, il quale sta compreso tra il punto B dove si tira la divisoria, ed il lato AC, nel quale va a terminare la medesima. Ora questo lato AC si dirà sempre in appresso *Lato della incidenza*; e finalmente il punto E dove finisce la divisoria, vien detto *Punto della incidenza*.

2. Sia per secondo caso il parallelogrammo rettangolo AD, del quale si sappia il lato AB di 100, il lato BD di 48, e la sua quadratura 4800; si cerca di tagliare dal medesimo una porzione di quadratura di 3100 maggiore della metà, ti-

Fig. 79

rando la divisoria dall'angolo A. Poichè la porzione di 3100, da tagliarsi, è maggiore della metà del dato parallelogrammo, così se noi stabiliamo per lato di appoggio AB, il lato della incidenza non può essere BD, ma sarà DC non adiacente al lato di appoggio, e perciò non potrà stabilirsi da questa parte il taglio triangolare. Per eseguire adunque questo taglio in forma triangolare, faremo così. Perchè tutto il parallelogrammo è di 4800, e la porzione da tagliarsi è di 3100, maggiore della metà, così noi sottraendo l'un numero dall'altro, avremo per residuo 1700. Questo residuo taglieremo dall'altra parte, e comechè è minore della metà, così stabiliremo per lato di appoggio AG di 48, e per lato d'incidenza, sarà il suo adiacente CD, affinchè tagliando in forma triangolare questo residuo, resti dall'altra parte determinato il quantitativo, che si cerca tagliare. Per eseguir tutto questo, si divida la quadratura residua 1700 per 24, metà del lato di appoggio AC, ed il quoziente $70\frac{1}{2}$ darà la lunghezza del lato d'incidenza CE; per cui tirando l'ipotenusa AE, la medesima sarà la divisoria, che stabilisce il termine della quantità enunciata.

Il metodo pratico, che noi abbiamo posto in opera per tagliare la descritta porzione, perchè lo abbiamo eseguito dalla parte opposta, tagliandone il residuo, perciò il medesimo lo diremo sempre in appresso *Taglio alla rovescia*, e del medesimo faremo sempre uso, ogni qualvolta le porzioni non possono tagliarsi a dirittura, o per la posizione de' lati, o perchè arrecasse del fastidio nel calcolo. Affinchè poi si avesse l'indizio sicuro, onde noi possiamo vedere, se una porzione, che si voglia tagliare, possa farsi a dirittura sul primo lato di appoggio, cadendo la divisoria sull'adiacente lato d'incidenza, o ci dovessimo servire del taglio alla rovescia, staccando sull'altro lato di appoggio il residuo, egli è a considerarsi, che dividendo la quadratura da tagliare per la metà del lato di appoggio AB, se il quoziente sia meno di tutto BD, allora il lato della incidenza sarà l'istessa BD, perchè la porzione è meno della metà del parallelogrammo; che se poi il quoziente oltrepassi il lato della incidenza BD, allora è segno, che la porzione da staccarsi è più della metà del parallelogrammo, e perciò il lato della incidenza non può essere BD, ma sarà DC, il quale sta adiacente all'altro lato di appoggio CA, comechè tocca il punto A, donde si tira la divisoria, e così sarà mestieri di ser-

virici del taglio alla rovescia. Avvertasi finalmente, che i due lati del parallelogrammo, che sono uniti ad angolo retto nel punto, donde incomincia la divisoria, i medesimi sono sempre lati di appoggio, come AB, AC, e gli altri due lati adiacenti a questi, come BD, CD sono i lati rispettivi d'incidenza.

6. *Dato un Parallelogrammo rettangolo noto, tagliarne una porzione in forma di capotagliato.* Accade un caso di questa guisa ogni qualvolta la quantità, che si vuol tagliare da un parallelogrammo, sia maggiore della sua metà, e di più che non voglia farsi uso del taglio alla rovescia. L'esempio intanto sarà quello, che farà chiaramente comprendere la pratica presente. Sia il parallelogrammo rettangolo AD, del quale si sappia il lato AB di 116, il lato AC di 110, e tutta la sua quadratura 11760. Si cerca ora, che dall'angolo A tirando la divisoria, se ne tagli una porzione 8000, servendoci di AB per lato di appoggio. Questo, e simili casi si risolverebbero facilmente col tagliare alla rovescia il residuo 3760 dall'altra parte in forma triangolare ACE; ma noi vogliamo tagliare a dirittura la porzione 8000, la quale essendo maggiore della metà, così non potendo venire in forma triangolare, dovrà essere per necessità un taglio fatto a capotagliato. Ora in questo, ed in altri casi simili, si operi nel modo seguente. Poichè 8000 da tagliarsi dal punto A deve servirsi di AB per lato di appoggio, e la divisoria non potendo cadere nel lato d'incidenza BD, ma nel lato DC, perciò noi appoggiando sul lato AB, ei serviremo di BD per lato divisore, o sia vero lato di appoggio, il quale è adiacente al lato AB, ed adiacente all'altro lato DC, che si stabilisce per lato della incidenza. Quindi la quadratura 8000 si divida per 55, metà del lato vero di appoggio BD, ed avremo per quoziente $145 \frac{5}{11}$. Da questo quoziente se ne tolga il lato di appoggio AB di 116, ed il residuo $29 \frac{5}{11}$ sarà la lunghezza da contarsi da D in E nel lato d'incidenza; per cui tirata AE, la medesima sarà la divisoria richiesta, formando il capotagliato ABDE di 8000, che si cercava.

Avvertiamo intanto in questo, ed in tutti i casi futuri di taglio eseguito in forma di capotagliato, da osservarsi la regola generale, che il lato che serve per divisore della quadratura che si taglia, deve avere da una parte il lato di appoggio, e dall'altra il lato d'incidenza, sul quale cade la divisoria.

Fig. 8.

Gli esempi finora esposti di una porzione di quadratura, che si stacca da un parallelogrammo, ci fanno vedere, come si fatti tagli possono eseguirsi in modi diversi, secondo che portano le circostanze del taglio istesso, o come a noi ne venisse a grado; ma noi vogliamo tutte le esposte maniere, e qualche altra ancora, mostrarle in un parallelogrammo, il quale venga diviso in moltissime porzioni. L'esempio, che segue, farà conoscere tutti sì fatti ingegnosi artifici.

Fig. 81 7. *Dividere un parallelogrammo rettangolo da un punto preso in un angolo.* Sia il parallelogrammo rettangolo BD, che debba dividersi in dieci porzioni disuguali, ma che tutte queste porzioni debbano cominciare dal punto A, che è uno degli angoli del parallelogrammo. Questo punto A, dal quale si tirano tutte le linee divisorie, si dirà da noi sempre in appresso *Punto divisorio*. Per dividere adunque questo parallelogrammo dal punto divisorio dato, e secondo una data ragione, egli fa mestieri di prima preparare questa, o qualsivoglia altra figura; ed una tale preparazione consiste nel prendere la quadratura della intera figura col fare la necessaria riduzione. Eseguito tutto questo, conosceremo, che il lato AB sia di 110, il lato AD di 90, e tutta la quadratura del parallelogrammo 9900. Si fatta quantità totale si distribuisca in dieci parti ad arbitrio, come A di 1000, B di 860, C di 940, D di 1050, E di 800, F di 1100, G di 1000, H di 900, I di 1400, e K di 850, facendo il primo lato di appoggio AB. Vedremo qui appresso come si eseguono questi tagli.

Per dare ad A la sua porzione 1000, la medesima deve tagliarsi da tutto il parallelogrammo BD, e poichè questa porzione è minore della metà dello stesso parallelogrammo, perciò la taglieremo in forma triangolare, servendoci di AB per lato di appoggio, e di BC per lato d'incidenza, sopra di cui cade la prima divisoria. Quindi questa prima parte 1000 divisa per 55 metà del lato di appoggio AB, il quoziente $18 \frac{2}{5}$ darà la lunghezza BE contata dal punto B nel lato d'incidenza, e di poi tirata la linea AE, questa sarà la divisoria della prima porzione.

Per dare a B la parte 860, si osservi, che dovendoci scrivere del medesimo lato di appoggio AB, così sarà necessario, che a questa porzione di B uniamo ancora la porzione di A prima divisa, ed avremo la somma di 1860; e poichè

questa somma è anche minore della metà del parallelogrammo, così la divisoria cadrà nel lato stesso d'incidenza BC. Diviso adunque 1860 per 55, metà di AB, il quoziente $33 \frac{4}{11}$ darà la lunghezza BF numerata dal punto B sino ad F; e tirata poi AF, la medesima sarà la divisoria di B, la cui porzione sarà compresa da FEA distinta dalla porzione di A, che sta nel triangolo EBA.

Per dare a C la parte 940, perchè ci dobbiamo servire dello stesso lato di appoggio AB, perciò alla parte di C uniremo quella di B, e quella di A, e si avrà la somma di 2800; e perchè questa somma è anche minore della metà dal parallelogrammo, perciò la divisoria cadrà nello stesso lato d'incidenza BC. Diviso adunque 2800 per 55 metà di AB, il quoziente $50 \frac{4}{11}$ darà la lunghezza BG contata dal punto B sino a G; e tirata poi AG, la medesima sarà la divisoria di C, la cui porzione viene racchiusa da GFA, distinta dalle altre antecedenti.

Per dare a D la sua parte 1050, si rifletta, che dovendoci servire dello stesso lato di appoggio AB, perciò sarà uopo, che alla porzione di D si uniscano ancora le porzioni di C, di B, e di A, ed avremo la somma 3850, e perchè si trova questa somma anche minore della metà del parallelogrammo, così la divisoria cadrà nel lato stesso BC della incidenza. Si divida dunque 3850 per 55 metà di AB, ed il quoziente 70 darà la lunghezza BH numerata dal punto B sino ad H, e quindi tirata AH, questa sarà la divisoria di D, la cui porzione viene espressa da HGA.

Per dare ad E la sua parte 800, si osservi, che dovendo far uso dello stesso lato di appoggio AB, perciò alla porzione di E uniremo quella di D, di C, di B, ed di A, ed avremo la somma 4650; e perchè questa somma si trova anche minore della metà del parallelogrammo, perciò la divisoria cadrà nello stesso lato BC della incidenza. Divideremo dunque 4650 per 55 metà del lato d'appoggio AB, ed il quoziente $84 \frac{4}{11}$ darà la lunghezza BI contata dal punto B sino ad I; e perciò tirata AI, la medesima sarà la divisoria di E, la cui porzione viene compresa dal pezzo IHA, distinto da tutti gli altri tagli dianzi eseguiti.

Tutti i tagli fin qui eseguiti sono stati tutti poggiati sopra il lato AB, ed hanno avuto il medesimo lato d'incidenza BC unito al primo nell'angolo B. Questi tagli si sono succeduti l'un l'altro progressivamente, sommando sem-

pre insieme le porzioni divise coll' altra da dividersi, finchè si è arrivato nel punto I, in dove la somma delle cinque porzioni unite è ancora minore della metà del parallelogrammo. Questo progressivo modo da tagliare le porzioni, fatto nella prima metà del parallelogrammo, si dice *Divisione a dirittura*; perchè sempre riconoscono il primo lato di appoggio AB, ed il primo lato d'incidenza BC. Arrivato a questo termine, se noi aggiungeremo alla somma di tutti cinque i tagli fatti, l'altra porzione di F di 1100, allora la somma 5750 sarà maggiore della metà del parallelogrammo, per cui non potendo più essere BC il lato della incidenza, non potremo neppur servirci di AB per quello di appoggio; giacchè per questa quantità maggiore 5750, dovendosi anche dividere dal punto divisorio A, la linea divisoria cadrà necessariamente nel lato CD. Quindi ritrovandoci in questo caso, noi esporremo differenti modi come tagliare le altre porzioni nella seconda metà del parallelogrammo, ed il primo sarà il metodo seguente.

Per dare ad F la porzione 1100, si rifletta, che sommando insieme questa parte di F con quella di tutte le antecedenti di A, di B, di C, di D, e di E, avremo la somma 5750; e poichè questa è maggiore della metà del parallelogrammo, perciò non potremo tagliarla più in forma triangolare, giacchè la divisoria non cade più nel lato BC, ma dovremo tagliarla in forma di capotagliato, serveudoci per lato divisore BC, e per lato d'incidenza CD. L'artificio dunque consiste, che tutta la quadratura da tagliarsi 5750, deve rappresentare un capotagliato, del quale sappiamo l'altezza BC, ed un lato BA, e non dobbiamo far altro, che ritrovare l'altro lato parallelo. Quindi divideremo 5750 per 45, metà di AD, ed avremo per quoziente $127 \frac{1}{4}$. Da questo quoziente si sottragga il lato BA di 110, ed il residuo $17 \frac{3}{4}$ darà la lunghezza CK, che è l'altro lato parallelo del capotagliato, e che si numera da C in K; e tirata poi AK, la medesima sarà la divisoria per la porzione di F compresa dal pezzo KCIA.

Per dare a G la sua parte 1000, noi uniremo questa parte di G a tutte le antecedenti di F, di E, di D, di C, di B, e di A, ed avremo la somma 6750 da tagliarsi anche in forma di capotagliato. Quindi si divida il numero 6750 per 45, metà del lato BC, e dal quoziente 150 si sottragga il lato BA di 110, ed il residuo 40 darà la lunghezza CL,

contata da C sino ad L; e poi tirata AL, la medesima sarà la divisoria per la porzione di G, contenuta nella figura LKA.

Per dare ad H la porzione 900, si faccia così. Si unisca-
no a questa porzione tutte le antecedenti, ed avremo una
somma di 7650 da tagliarsi nel modo istesso. Diviso adun-
que 7650 per 45, metà del lato AD, avremo per quoziente
170, dal quale sottratto 110 del lato BA, il residuo 60 darà
la lunghezza CM contata da C in M; e tirata poi AM, que-
sta sarà la divisoria per la parte di H, la quale è racchiusa
da MLA.

Per dare ad I la sua porzione 1400, si faccia la stessa
operazione. Si unisca questa somma a tutte le altre ante-
cedenti, e si avrà 9050 da tagliarsi. Quindi dividendo si
fatto numero 9050 per 45 metà del lato AD, avremo per
quoziente $201 \frac{1}{4}$, dal quale sottratto 110 del lato BA, il
residuo $91 \frac{1}{4}$ sarà la lunghezza CN dell'altro lato paralle-
lo, contata da C sino ad N; per cui tirata AN, la medesi-
ma sarà la divisoria per la porzione di I, che si contiene da
NMA. Arrivato a questo termine, ci resta il pezzo DNA di
850, che è l'ultima porzione spettante a K, e così termi-
neremo tutta l'operazione.

Il metodo come abbiamo divisa questa seconda metà del
parallelogrammo per situare nel di loro ordine tutte le al-
tre porzioni, che seguono quelle contenute nella prima
metà del medesimo parallelogrammo, poichè le abbiamo
tagliate in forma di capotagliato, perciò questo modo da
fare i tagli nella seconda metà del parallelogrammo, si dice
Divisione a capotagliato. Noi intanto non brigandoci più
di quei tagli fatti nella prima metà del parallelogrammo,
faremo vedere come questi altri tagli nella seconda metà
dello stesso parallelogrammo si possono eseguire di un'al-
tra maniera, e ripiglieremo il calcolo dalla porzione di F,
facendo nel modo seguente.

Nella prima metà CBA del parallelogrammo si han po-
tuto situare cinque porzioni di A, di B, di C, di D, di E
colla divisione a dirittura, giacchè tutte queste sono pog-
giate sopra il lato BA di appoggio, ed hanno avuto BC
per lato d'incidenza. Dovendo ora situare appresso delle
medesime la porzione di F di 1100, se questa si unisca alle
cinque prime, avremo una somma di 5750, la quale oltre-
passa la metà del parallelogrammo, per cui non può essere
tagliata a dirittura, ma dovremo usare un altro artificio, di-

cendo così. Tutto il parallelogrammo è di 9900, e perchè le cinque porzioni tagliate, e contenute nel pezzo IBA fanno la somma di 4650, così sottratto questo da tutto l'intero, avremo per resto 5250, che si contiene nel pezzo ICDA. Per tagliare adunque la porzione di F di 1100, che deve situarsi a fianco di quella di E, noi faremo così. Poichè la divisoria per F cade nel lato CD, perciò noi ci serviremo di AD per lato di appoggio, e di DC per quello d'incidenza. Si sottragga da questo pezzo 5250 la porzione 1100 di F, ed il resto 4150 si divida per 45, metà di AD, ed il quoziente $92 \frac{1}{3}$ darà la lunghezza DK contata da D sino a K, e tirata AK, questa sarà la divisoria per F, la cui porzione resta compresa in KCIA, restando il pezzo KDA di 4150 per uso delle altre porzioni. Dunque con questo taglio, eseguito in tal modo, non abbiamo fatto altro, che lasciare la porzione di F a fianco della porzione di E, e staccare il resto del pezzo col taglio KDA, come è chiaro a capirsi.

Per dare a G la sua parte 1000, perchè tutto il pezzo KDA è di 4150, perciò da questo ne toglieremo il numero 1000, ed il residuo 3150 lo divideremo per 45, metà di AD, ed il quoziente 70 darà la lunghezza DL numerata da D in L, e tirata AL, la medesima sarà la divisoria di G, la cui porzione resta chiusa in LKA, restando il pezzo LDA staccato di 3150 per servire alle altre porzioni.

Per dare ad H la sua parte 900, noi ne abbiamo 3150 nel pezzo LDA, per cui da questo togliendone la parte di H di 900, ci resta l'avanzo 2250. Questo numero si divida per 45, metà di AD, ed il quoziente che nasce 50, darà la lunghezza DM contata da D in M, a tirata AM, questa sarà la divisoria di H, la cui parte è compresa in MLA, restando il pezzo MDA di 2250, che serve per le seguenti porzioni.

Per dare ad I la sua porzione 1400, perchè ne abbiamo 2250 nel pezzo MDA, perciò da questo togliendone la parte di I di 1400, ci resta l'avanzo 850. Si divida questo avanzo 850 per 45, metà di AD, ed il quoziente $18 \frac{2}{3}$ darà la lunghezza DN contata da D in N, e tirata AN, la medesima sarà la divisoria di I, la cui porzione sarà compresa in NMA, restando l'avanzo DNA di 850 che è l'ultima porzione di K, e così termineremo tutta la distribuzione delle date porzioni.

Quest'altra maniera, onde noi abbiamo staccate quelle porzioni, che entrano nella seconda metà del parallelo-

grammo per situarle in sequela delle prime, poichè le abbiamo tagliate sempre retrocedendo, perciò questo metodo si dice *Divisione alla rovescia*. Esporremo intanto un altro modo, come situare le stesse porzioni, che entrano in questa seconda metà del parallelogrammo, e lo faremo coll'artificio seguente.

Dopochè colla divisione a dirittura abbiamo tagliate cinque porzioni in A, di B, di C, di D, e di E, e siamo arrivati ad occupare quasi la prima metà del parallelogrammo, per situare poi la porzione di F, la detta metà non può più contenerla, per cui si deve lasciare il lato di appoggio AB, perchè quello d'incidenza non può essere più BC, ma deve essere CD. Quindi nella seconda metà del parallelogrammo essendo il lato d'incidenza CD, dovrà essere AD quello di appoggio, perchè tocca il punto A divisorio. Ora in vece di continuare l'ordine delle porzioni in sequela delle prime, e proseguire colla porzione di F, noi faremo uso di questo altro modo. Dopo di esser giunto sino ad I per la parte di E, in vece di situare F appresso, noi la lasceremo, e principieremo dall'ultima porzione, che è K di 850, situandola sopra il lato di appoggio AD, e quello d'incidenza DC, continuando i tagli coll'ordine retrogrado, finchè resti la porzione di F compresa tra i primi, ed i secondi tagli, e tutto ciò sarà eseguito nel modo seguente.

Lasciando di tagliare la parte di F in ordine delle cinque prime porzioni terminate in I, noi principieremo dall'ultima K di 850, staccandola sopra CD, come lato di appoggio, e servendoci di DC, come lato d'incidenza. Dunque la porzione di K di 850, si divida per 45, metà di AD, ed il quoziente $18\frac{2}{3}$ darà la lunghezza DN contata da D in N, e tirata AN, questa sarà la divisoria per K, la cui porzione è contenuta da DNA.

Per dare ad I la sua porzione 1400, perchè ci dobbiamo servire dello stesso lato di appoggio AD, perciò uniremo la parte di K, e la parte di I, ed avremo la somma 2250, la quale divisa per 45, metà di AD, il quoziente 50 darà la lunghezza DM numerata da D in M; e tirata poi AM, questa sarà la divisoria di I, la cui porzione è compresa in NMA.

Per dare ad H la sua parte 900, si sommino insieme la parte di H, di I, e di K, e la somma 3150 si divida per 45, metà di AD, ed il quoziente 70, darà la lunghezza DL, coi-

tata da D in L ; e tirata AL, questa sarà la divisoria di H , la cui parte viene chiusa nel pezzo MLA.

Per dare a G la porzione 1000 , si uniscano insieme la parte di G , di H , di I , e di K , e la somma 4150 si divida per 45 , metà di AD , ed il quoziente $92 \frac{10}{9}$ darà la lunghezza DK numerata da D sino a K ; e tirata poi AK , la medesima sarà la divisoria di G , la cui porzione è racchiusa in LKA. Eseguito così tutto questo, resterà lo spazio KCIA di 1100 compreso tra questi ultimi tagli, ed i primi, e questo spazio per appunto sarà la porzione di F , ed in questo modo avremo terminata la divisione delle parti nel dato parallelogrammo.

Quest' ultimo metodo , che abbiamo esposto per situare le porzioni spettanti alla seconda metà del parallelogrammo, incominciando i tagli dall' ultima porzione per andare poi ad incontrare i primi, si dice *Divisione a ritorno* ; giacchè col cammino retrogrado si va ad incontrare le prime divisioni.

Fig. 8a 8. *Dividere un Parallelogrammo rettangolo da un punto preso in un lato.* Sia il parallelogrammo rettangolo BE, che debba dividersi in sei porzioni disuguali, ma che tutte queste porzioni debbono cominciare dal punto A preso in uno de' lati CE. Per dividere adunque questo parallelogrammo dal punto divisorio dato, e secondo una data ragione egli fa mestieri di prima preparare sì fatta figura, facendo così. Dal punto divisorio A si tiri la linea occulta AF in modo, che sia perpendicolare al lato CE, per cui in questo punto divisorio si formano due angoli retti. Fatto questo, tutto il parallelogrammo BE resta diviso dalla occulta AF in due parallelogrammi minori AB, AD, de' quali bisogna sapere le quadrature. Si misuri il lato BC di 40, la parte CA di 12, e la parte AE di 30; donde conosceremo, che la quadratura di AB sarà 480, e la quadratura di AD di 1200, e che sommate insieme daranno 1680 per la totale quadratura di tutto il parallelogrammo BE. Di più egli è da sapersi, che essendo A il punto divisorio, dal medesimo dobbiamo sempre concepire tirarsi le linee rette AC, AF, AE disposte tra di loro in maniera, che in A formino gli angoli retti; per cui ciascheduna di queste rappresenterà sempre un lato di appoggio. Finalmente conosciuta così la disposizione de' lati di appoggio sempre tirati ad angolo retto dal punto divisorio, e calcolata la quadratura totale, e

particolare della figura data, si distribuiscano le sei porzioni in quella ragione, che si vuole, in modo che A sia di 200, B di 500, C di 480, D di 320, E di 180, ed F di 200, e che la linea AE sia il primo lato di appoggio.

Per dare ad A la porzione 200, la medesima deve tagliarsi dal pezzo AD, e poichè questa porzione è minore della metà dello stesso pezzo AD, perciò la taglieremo in forma triangolare, servendoci del lato di appoggio AE, e di quello d'incidenza ED, sopra del quale cade la prima divisoria. Quindi la quadratura di questa prima porzione 200, divisa per 15, metà del lato di appoggio AE, il quoziente $13\frac{1}{3}$ darà la lunghezza EG contata dal punto E nel lato d'incidenza, e tirata di poi la linea AG, la medesima sarà la divisoria di A, che è la prima porzione.

Per dare a B la porzione 300, si osservi, che dovendoci servire del medesimo lato di appoggio AE, così sarà necessario, che a questa porzione di B uniamo ancora la porzione di A prima divisa, ed avremo la somma 500; e poichè questa somma è anche minore della metà del pezzo AD, così la divisoria cadrà nel lato stesso d'incidenza ED. Diviso adunque 500 per 15, metà di AE, il quoziente $33\frac{1}{3}$ darà la lunghezza EH numerata dal punto E sino ad H; e tirata poi AH, la medesima sarà la divisoria di B, la cui porzione sarà compresa da AHG, distinta dalla porzione di A nel triangolo AGE.

Per dare a C la porzione 480, si rifletta, che dovendo essere AE il lato di appoggio, così uniremo in una somma la parte di A, la parte di B, e la parte di C, ed avremo 980; e poichè questo numero è maggiore della metà del pezzo AD, perciò non potremo tagliarlo in forma triangolare, giacchè la divisoria non cade nel lato ED, ma dovremo tagliarlo in forma di capotagliato, servendoci per lato divisore ED, e per lato d'incidenza DF. Quindi divideremo 980 per 20, metà di ED, ed avremo per quoziente 49. Da questo quoziente si sottragga il lato AE di 50, ed il residuo 19 darà la lunghezza DI, che è l'altro lato parallelo del capotagliato, e che si numeri da D in I; e tirata AI, la medesima sarà la divisoria per la porzione di C, compresa nella figura AIDH. Ora qui egli è da osservarsi, che tutte le porzioni, che sono cadute nel pezzo AFDE, hanno avuto sempre AE per lato di appoggio; ma le altre porzioni che cadranno nell'altro pezzo AFBC dovranno avere per lato di appoggio AF, che è l'altra linea

tirata nel punto divisorio, che fa angolo retto col primo lato di appoggio. Ben inteso questo, egli è d'avvertirsi, che la porzione di A, di B, e di C, unite insieme essendo 980, ed essendo il pezzo AD di 1200, ci resta un residuo di 220 compreso nel triangolo AFI, il quale deve entrare in quell'altra porzione, che si taglia dall'altro pezzo AB.

Per dare a D la porzione 320, si consideri, che noi abbiamo nel pezzo AD un residuo AFI di 220, per cui il di più 100 lo dobbiamo prendere nell'altro pezzo AB, servendoci di AF per lato di appoggio. Ora poichè 100 è minore della metà del pezzo AB, così il lato della incidenza sarà BF, adiacente al lato di appoggio; quindi dividendo 100 per 20, metà di AF, il quoziente 5 darà la lunghezza FK, contata da F sino a K; per cui tirata AK, la medesima sarà la divisoria per la porzione di D compresa da tutto il triangolo AKI.

Per dare ad E la porzione 180, si osservi, che dovendo essere AF il lato di appoggio, noi uniremo in una somma la porzione AFK di 100, e la porzione di E di 180, ed avremo in tutto 280; ma perchè questa somma è maggiore della metà di AB, perciò non potremo tagliarla in forma triangolare, perchè la divisoria non cade nel lato FB, ma cade nel lato BC, per cui dovremo tagliarla in forma di capotagliato, servendoci di FB per lato divisore, e di BC per lato d'incidenza. Quindi dividendo 280 per 6, metà di FB, avremo per quoziente $46\frac{2}{3}$, dal quale sottraendo FA di 40, il residuo $6\frac{2}{3}$ darà la lunghezza BL, numerata da B in L, ch'è l'altro lato parallelo del capotagliato; per cui tirata AL, la medesima sarà la divisoria per la porzione di E, il resto LCA, del pezzo AB, sarà la porzione ultima di F di 200, e così termina tutta l'operazione.

Egli è qui d'avvertire, che dopo di aver così divisa una figura, egli è mestieri, che se ne faccia la prova, calcolando ciascheduna porzione in particolare, per indi conoscere, se la somma di tutte le medesime si uguaglia all'intera quadratura di tutta la data figura.

9. Dividere un parallelogrammo rettangolo da un punto preso nello spazio. Sia il parallelogrammo rettangolo BDEC da dividersi in sette porzioni, comunque disuguali, ma che il punto divisorio A sia in un luogo qualunque del suo spazio. Per eseguire tutto questo sarà necessario d'intendere la seguente cosa. Nel punto divisorio A si concepisca sempre posto lo squadro, le cui linee visuali de' quadranti sono

rappresentate dalle due occulte FG, HI, le quali s'intersecano nell'asse dello strumento in quattro angoli retti in A, e che si dicono la *Croce dello squadro*, e che formano perciò quattro linee rette AI, AG, AH, AF, che sono le quattro quadranti. Queste sono quelle medesime quattro linee, che servono sempre per lato di appoggio, ciascheduna a suo luogo. E queste istesse quattro linee sono altresì quelle, che dividono il parallelogrammo in quattro parallelogrammi minori AC, AB, AD, AE.

Ben inteso tutto questo, si misurino i lati necessarî per così ritrovare la quadratura di ogni parallelogrammo minore, la quale si noti nel mezzo di ciascheduno, ovvero a fianco, e poi la di loro somma 2000 sarà la quadratura di tutto il parallelogrammo. Finalmente di questa totale quadratura se ne debbono fare sette porzioni, e sarà A di 230, B di 100, C di 320, D di 280, E di 360, F di 220, e G di 490, facendo il primo lato di appoggio AI una delle quadranti.

Per dare ad A la porzione 230, poichè la medesima è maggiore della metà del pezzo AE, così non potrà essere tagliata a triangolo, ma dovrà eseguirsi in forma di capotagliato. Quindi lasciando il primo lato di appoggio AI, ci serviremo per lato divisore di EI, e sarà poi EG il lato d'incidenza. Si divida dunque 230 per 15, metà di IE, ed avremo per quoziente $15\frac{1}{3}$, dal quale sottratto AI di 15, il residuo $\frac{2}{3}$ darà la lunghezza EK, e tirata AK, la medesima sarà la divisoria per la porzione di A.

Per dare a B la porzione 100, perchè questa anche cade nel primo pezzo, e dovendoci servire del medesimo lato divisore IE, comechè viene eseguita in forma di capotagliato, così uniremo la parte di A, e di B, ed avremo la somma 330. Dividendo dunque 330 per 15, metà di IE, avremo per quoziente 22, dal quale sottratto il lato AI di 15, il residuo 7 darà la lunghezza EL nel lato d'incidenza; e tirata poi AL, questa sarà la divisoria per la parte di B. Avvertasi in questo luogo, che avendo tagliato la parte di A, e di B dal primo pezzo AE, del medesimo ci è rimasto il residuo triangolare AGL di 120, il quale farà parte della porzione, che segue. Dippiù tutte le porzioni, che cadranno nell'altro pezzo AD, avranno per lato di appoggio AG, che è l'altra linea della croce de' quadranti. In generale avvertiamo, che i lati di appoggio per qualsivoglia divisione debbano essere sempre, ed in ogni caso, le linee della croce de' quadranti dello squadro.

Per dare a C la porzione 320, si osservi, che noi abbiamo nel primo pezzo AE un residuo triangolare AGL di 120, per cui dobbiamo prendere dal pezzo susseguente AD il dippiù 200, e sarà la linea de' quadranti AG il lato di appoggio. Inoltre essendo 200 minore della metà di questo pezzo AD, la divisoria cadrà nel lato della incidenza GD, ed il taglio sarà in forma triangolare. Diviso adunque 200 per 15, metà di AG, il quoziente $13\frac{1}{3}$ darà la lunghezza GM contata da G in M; e tirata poi AM, la medesima sarà la divisoria per C, la cui porzione viene compresa da tutto AML.

Per dare a D la porzione 280; perchè il lato di appoggio è AG, così uniremo quella parte di C, che è compresa solo da AGM, e la parte di D, ed avremo 480, il quale essendo maggiore della metà del pezzo AD, così non possiamo tagliarlo in forma triangolare, ma dovrà essere in forma di capotagliato. Quindi è che lasceremo il lato di appoggio AG, e ci serviremo di GD per lato divisore. Diviso adunque 480 per $12\frac{1}{2}$, metà di GD, avremo per quoziente 58 $\frac{2}{3}$, dal quale sottratto AG, il residuo $8\frac{2}{3}$ darà la lunghezza DN nel lato d'incidenza; per cui tirata AN, la medesima sarà la divisoria per D, la cui porzione è compresa da ANDM. Fatto questo, del pezzo AD ci resta il residuo triangolare AIN di 270, il quale entra a far parte dell'altra porzione, che si taglia nell'altro pezzo AB.

Per dare ad E la porzione 360, si osservi, che noi abbiamo un residuo 270 nel pezzo AD, per cui il dippiù 90 lo dobbiamo prendere nell'altro pezzo AB, e sarà AH il lato di appoggio, ed HB il lato d'incidenza, giacchè 90 è minore della metà di questo pezzo. Diviso dunque 90 per $12\frac{1}{2}$, metà del lato di appoggio AH, il quoziente 7 $\frac{1}{2}$ darà la lunghezza HO; per cui tirata AO, la medesima sarà la divisoria per E, compresa nel triangolo AON.

Per dare ad F la porzione 220, poichè il lato di appoggio è AH una delle linee de' quadranti, per ciò uniremo quel quantativo di E, che è racchiuso dal solo AHO, ed il quantativo di F, ed avremo 510, il quale perchè è maggiore della metà del pezzo AB, così è chiaro, che non potendo venire il taglio triangolare, deve essere a capotagliato; per cui lasciando il lato di appoggio AH, ci serviremo per lato divisore di HB, e sarà BF il lato d'incidenza. Ora dividendo 510 per 10, metà di HB, avremo 51 per quoziente, dal quale sottratto AH, il residuo 6 darà la lunghezza BP; e tirata

AP, la medesima sarà la divisoria per F, la cui porzione viene compresa AOBP. Finalmente il resto PAIC di 490 sarà la porzione di G, come è chiaro a capirsi.

Questi problemi di divisione ci fanno essere nella speditezza di saper dividere qualsivoglia parallelogrammo rettangolo. Avvertiamo intanto, che queste divisioni, e tutte quelle, che seguiranno, sono fatte tutte da un punto; giacchè a suo luogo esporremo la pratica di saper adattare in questo punto uno sfogo comune. Entriamo al presente a vedere come possa eseguirsi la divisione delle figure triangolari, e delli trapezi ad angoli sporgenti.

10. *Dato un triangolo rettangolo, ritrovarne un altro uguale, sia rettangolo, sia acutangolo.* Sia il triangolo ABC rettangolo in B. Si cerca sopra la istessa base AB stabilire un altro triangolo, sia ottusangolo, sia acutangolo, ma che sia in valore uguale al dato triangolo rettangolo. Per ritrovare un triangolo ottusangolo uguale al dato, si faccia così. Si tiri dal punto B la indefinita BD, la quale faccia con AB qualsivoglia angolo ottuso ABD; indi dal vertice C si tiri CE parallela alla base AB; e poichè CE interseca BD nel punto E, così da questo punto si tiri la retta EA, ed il triangolo ottusangolo EAB sarà uguale al rettangolo CAB. La ragione è manifesta, perchè i triangoli, che hanno la stessa base, e sono posti tra le istesse parallele, i medesimi sono uguali tra di loro. Fig. 81

Per ritrovare un triangolo acutangolo uguale al triangolo rettangolo dato, si faccia così. Si tiri da B la retta indefinita BG, che faccia con AB qualsivoglia angolo acuto GBA; di poi dal vertice C si tiri CF parallela alla base AB, e perchè CF interseca BG nel punto F, così da questa intersecazione si tiri la retta FA, ed il triangolo acutangolo FAB sarà uguale al triangolo rettangolo CAB. La ragione è manifesta, essendo la stessa dell' antecedente.

11. *Dividere un triangolo obliquangolo, facendo per punto divisorio un angolo, e per lato di appoggio la base.* In tutte le divisioni fatte ne' parallelogrammi rettangoli, i tagli, che abbiamo eseguiti in forma triangolare, hanno avuta l' opportunità di aver il lato di appoggio per base, ed il lato d' incidenza per altezza, la quale deve sempre essere perpendicolare alla base, ed in conseguenza questi tagli sono stati sempre triangoli rettangoli. Quando poi le figure da dividersi fossero tutto altro, come accade ne' triangoli, e nei

trapezi, allora sebbene questi tagli, in forma triangolare, avessero per base il lato di appoggio, il lato della incidenza però non è perpendicolare al primo, ma è obbliquo, ed il quale può essere o approssimante, o sfuggente, ed allora l'altezza ritrovata col calcolo non potrà adattarsi, e numerarsi sul medesimo lato, giacchè deve essere sì fatta altezza necessariamente perpendicolare alla base. Intanto ritrovandoci in un caso di questa guisa, noi esporremo un artificio, onde ritrovare dove si possa adattare l'altezza calcolata sopra il lato obliquo della incidenza. E poichè questo lato obliquo può essere approssimante al lato di appoggio, ovvero sfuggente, così due casi possono accadere.

Fig. 85 1. Sia per primo caso il triangolo CBA da dividersi in quattro porzioni disuguali, facendo nell'angolo A il punto divisorio, e la base AB per lato di appoggio. Sia intanto la base AB di 44, e l'altezza CD di 44, per cui la sua quadratura 968, da doversi dividere in quattro porzioni, delle quali A sia di 300, B di 210, C di 240, e D di 218, essendo BA il lato di appoggio, ed il lato obliquo approssimante BC quello della incidenza.

Per dare ad A la sua porzione 300, si rifletta, che essendo BA il lato di appoggio, dovrà essere BC il lato della incidenza; e poichè questi due lati non si uniscono in B ad angolo retto, ma sono tra di loro obbliqui approssimanti, perciò noi la porzione 300, che dobbiamo prendere, la taglieremo a triangolo rettangolo, e poi ritroveremo un triangolo acutangolo, ovvero ottusangolo, come accaderà, e che sia uguale alla quantità, che si taglia. Quindi dividendo 300 per 22, metà di AB, avremo per quoziente $13 \frac{4}{11}$. Ora dovendo situare la lunghezza di questo quoziente, e non potendo numerarla sopra il lato d'incidenza BC, perchè obliquo, ma la dobbiamo contare a perpendicolo sopra il lato di appoggio CA, noi faremo così. Dall'estremo B del lato di appoggio innalzeremo la perpendicolare occulta BE lunga $13 \frac{4}{11}$, che si dirà sempre in appresso l'*Alzata*, e poi dal punto E tireremo l'altra perpendicolare occulta EF, che si dirà sempre in appresso la *Parallela*, perchè sempre sarà parallela al lato di appoggio. Questa parallela determina in F il punto dell'incontro nel lato d'incidenza; per cui tirata AF, la medesima sarà la divisoria per la porzione di A, che è compresa nel triangolo BFA. Avvertasi intanto in questo luogo, che l'alzata BE, perchè è fuori del triangolo, perciò si dice *Al-*

zata esterna. Finalmente la ragione di questa operazione è manifesta. Imperciocchè se fingiamo tirata una linea EA, avremo un triangolo rettangolo EAB, il quale sarà uguale al triangolo obbliquangolo BFA, perchè poggiano sopra la istessa base BA, e sono compresi tra due parallele EF, BA.

Per dare a B la sua parte 210, poichè dobbiamo servirci del medesimo lato di appoggio BA, e del medesimo lato obbliquo d'incidenza BC, così uniremo la parte di A, e la parte di B, ed avremo la somma 510. Diviso adunque 510 per 22, metà di BA, avremo per quoziente $23\frac{4}{11}$. Quindi dall'estremo B tireremo l'alzata esterna BG di $23\frac{4}{11}$, e poi dal punto G tireremo la parallela GH, la quale tocca in H il lato d'incidenza; e finalmente tirata AH, la medesima sarà la divisoria per B, la cui porzione viene racchiusa nel triangolo HFA.

Per dare a C la porzione 240, poichè ci serviamo del medesimo lato di appoggio BA, e dello stesso lato obbliquo d'incidenza BC, così uniremo la parte di A, di B, e di C, ed avremo la somma 750. Questa somma divisa per 22, metà del lato di appoggio, darà per quoziente $34\frac{9}{11}$; per cui facendo tanto lunga l'alzata esterna BI, tirata dall'estremo B, e poi tirata la parallela IK, che avremo il punto dell'incontro K nel lato obbliquo d'incidenza, e poi tirata AK, questa sarà la divisoria per la parte di C, la quale si contiene nel triangolo KHA. Finalmente il resto CKA di 218 della intera figura sarà la porzione di D, come è chiaro a comprendersi.

2. Sia per secondo caso il triangolo CBA da dividersi in quattro porzioni disuguali, facendo nell'angolo A il punto divisorio, e la base AB per lato di appoggio. Sia intanto questa base AB di 46, e l'altezza CD di 44, per cui la sua quadratura sarà 1012, da doversi dividere in quattro porzioni, delle quali A sia di 190, B di 260, C di 210, e D di 352, essendo BA il lato di appoggio, ed il lato obbliquo sfuggente BC quello della incidenza.

Per dare ad A la sua porzione 190, egli è a ricordarsi, che essendo BA il lato di appoggio, dovrà esser BC il lato della incidenza; e poichè questi due lati non si uniscono in B ad angolo retto, ma sono tra di loro obbliqui sfuggenti, perciò noi la porzione 190, che dobbiamo prendere, la taglieremo a triangolo rettangolo, e poi ritroveremo un triangolo ottusangolo, ovvero acutangolo, come accaderà, e che sia uguale alla quantità, che si taglia. Divideremo

Fig. 86

dunque 190 per 23, metà di AB, ed avremo per quoziente $8 \frac{2}{3}$. Ora dovendo fissare la lunghezza di questo quoziente, e non potendo numerarla sopra il lato d'incidenza BC, perchè obbliquo, ma la dobbiamo contare a perpendicolo sopra il lato di appoggio BA, perciò faremo così. Dall'estremo B del lato di appoggio s'innalzi la perpendicolare occulta BE lunga $8 \frac{2}{3}$, e che sarà l'alzata, e poi dal punto E tireremo l'altra perpendicolare occulta EF, e che sarà la parallela, la quale determina in F il punto dell'incontro nel lato d'incidenza; per cui tirata AF, la medesima sarà la divisoria per la porzione di A, che è compresa nel triangolo AFB. Avvertasi in questo luogo, che l'alzata BE, perchè è dentro del triangolo, perciò si dice *Alzata interna*. Finalmente la ragione di questa pratica è manifesta. Imperciocchè se fingiamo tirata una linea EA, avremo un triangolo rettangolo EBA, il quale sarà uguale al triangolo obbliquangolo BFA, perchè poggiano sopra la istessa base BA, e sono racchiusi tra due parallele EF, AB.

Per dare a B la sua parte 260, poichè dobbiamo servirci del medesimo lato di appoggio BA, e del medesimo lato obbliquo d'incidenza BC, così uniremo la parte di A, e la parte di B, ed avremo la somma 450. Diviso adunque 450 per 23, metà di BA, avremo per quoziente $19 \frac{1}{3}$. Quindi dall'estremo B tireremo l'alzata interna BG di $19 \frac{1}{3}$, e poi dal punto G tireremo la parallela GH, la quale tocca in H il lato d'incidenza; e finalmente tirata AH, la stessa sarà la divisoria per B, la cui porzione è racchiusa nel triangolo HFA.

Per dare a C la porzione 210, poichè ci serviamo del medesimo lato di appoggio BA, e dello stesso lato obbliquo d'incidenza BC, così uniremo la parte di A, di B, e di C, ed avremo la somma 660. Questa somma divisa per 23, metà del lato di appoggio, darà per quoziente $28 \frac{4}{11}$, per cui facendo tanto lunga l'alzata interna BI, tirata dall'estremo B, e poi tirata la parallela IK, che avremo il punto dell'incontro K nel lato obbliquo d'incidenza; e poi tirata AK, questa sarà la divisoria per la parte di C, la quale si contiene nel triangolo KHA. Finalmente il resto CKA di 352 dell'intera figura sarà la porzione di D, come facilmente si capisce.

12. Dato un Capotagliato rettangolo, o qualsivoglia altro trapezio quadrilatero, che abbia un angolo retto,

terminarlo in triangolo, e calcolarne tutto lo straniero tanto ne' lati, quanto nella quadratura. Sia in primo luogo il capotagliato rettangolo EABD, del quale si sappia Fig. 87 il lato AB di 60, il lato AE di 40, ed il lato BD di 25. Poichè i due lati AB, ED sono convergenti verso B, e D, perciò distesi i medesimi si uniranno nel punto C della convergenza, e costituiscono il gran triangolo rettangolo EAC, del quale la porzione DBC è tutta straniera. Si cerca ora di sapere col calcolo il residuo straniero BC di tutto il cateto AC; di più la perpendicolare BD; e finalmente tutta la quadratura straniera BDC.

Primieramente per sapere la lunghezza straniera BC si faccia così. Dal punto D si tiri la retta DF parallela ad AB; che le sarà anche uguale, comechè tirata tra le due parallele AE, BD, per cui sarà questa DF anche di 60, e la medesima taglierà da tutto AE di 40 la porzione FE di 15, lasciando FA di 25, comechè uguale a BD. Ben inteso tutto questo, si faccia la seguente regola del tre. Come EF di 15 sta ad FD di 60, così tutto EA di 40 al quarto proporzionale AC. Fatto il calcolo, avremo per tutto AC il quarto proporzionale 160, e perchè AB è di 60, perciò la lunghezza straniera BC sarà di 100. Inoltre poichè abbiamo la lunghezza BD di 25, ed essendo la medesima perpendicolare ad AC, così non avremo il bisogno di calcolarla. Finalmente moltiplicando BD di 25 per 50, metà di BC, il prodotto 1250 sarà la quadratura di tutto lo straniero DBC, che si cercava.

Sia in secondo luogo qualsivoglia trapezio quadrilatero BADC, che abbia un angolo retto A, e del quale si sappia Fig. 88 il lato AB di 42, ed il lato AD di 30. Poichè i due lati AD, BC sono convergenti verso D, e C, perciò prolungandosi si uniscono nel punto G della convergenza, e formano il gran triangolo rettangolo BAG, del quale la porzione GCD è tutta straniera. Si cerca ora di sapere col calcolo la lunghezza del residuo straniero DG di tutto il cateto AG, dippiù la perpendicolare CF, e finalmente la quadratura straniera DCG.

Primieramente per sapere la lunghezza straniera DG, si faccia così. Dall'angolo C si tiri CE parallela a DA, e misurandosi CE sia di 45, la quale tagliando da tutto BA la porzione EB di 30, lascia poi il resto EA di 12. Eseguito tutto questo, si faccia la seguente regola del tre. Come BE

di 30 sta ad EC di 45, così tutto BA di 42 al quarto proporzionale AG. Fatto il calcolo, avremo per tutto AG il quarto proporzionale 63, e perchè AD è lungo 30, così lo straniero DG sarà 33. Inoltre la retta CF, comechè perpendicolare, essendo uguale ad EA, sarà eziandio 12. Finalmente moltiplicando DG di 33 per 6, metà della perpendicolare CF, il prodotto 198 sarà la quadratura di tutto lo straniero GCD, che si cercava.

La esecuzione di questo importantissimo problema noi la chiameremo sempre in appresso *Apparecchio straniero angolare*, giacchè il medesimo unisce ad angolo, o sia al punto di convergenza, due lati della figura, che erano solo convergenti.

13. *Dato un Trapezio quadrilatero, che abbia un angolo retto, terminarlo in Capotagliato rettangolo, e calcolarne tutto lo straniero tanto ne' lati, quanto nella*

Fig. 89 *quadratura.* Sia il trapezio quadrilatero ABCD, che abbia un angolo retto B, e del quale si sappia il lato BC di 18, ed il lato BA di 12, che formano l'angolo retto. Si cerca di terminarlo a capotagliato rettangolo, e calcolarne tutto lo straniero. Per eseguirlo si faccia così. Dall'estremo C s'innalzi la perpendicolare CF tanto, finchè s'incontri con AD distesa oltre sino ad F, ed avremo così il capotagliato rettangolo AFCB; del quale vi è il triangolo straniero DFC, di cui si deve sapere l'altezza DE, la base FC, e tutta la sua quadratura DFC.

Per sapere la perpendicolare DE, dall'angolo D si tiri la retta GDE parallela, ed uguale a BC, e misurata DG di 12, la quale divide di tutto AB la parte AG di 4 dalla parte GB di 8; di più poichè GD è di 12, sarà il resto DE di 6, e questa sarà l'altezza del triangolo DFC, che si cercava. Per saper poi la lunghezza della base FC, si osservi, che tutta CE è di 8, comechè parallela, ed uguale a BG. Ora dall'estremo A si tiri AI parallela ed uguale a BC, e si unisca con CE prolungata in I, e si tiri la perpendicolare HD. Avremo adunque AH di 12, HD di 4, tutto AI di 18, e si cerca IF del triangolo rettangolo AIF, dicendo così. Come AH di 12 sta HD di 4, così tutto AI di 18 a tutto IF, quarto proporzionale. Fatto il calcolo, ritroveremo per IF la lunghezza 6; e perchè IE è di 4, così sarà EF di 2; e perchè EC è lunga 8, sarà FC di 6, e conosceremo così la base FC, che si cercava. Ora del triangolo DFC conoscendo l'al-

tezza 6, e la base 6, e moltiplicando la base per la metà dell' altezza, il prodotto 18, sarà la sua quadratura, e così avremo calcolato tutto lo straniero, che si cercava.

La pratica di quest'altro necessarissimo problema noi la diremo sempre in appresso *Apparecchio straniero laterale*, poichè il medesimo non fa unire all'angolo della convergenza i lati, ma li arresta nel lato del capotagliato rettangolo.

14. *Dividere qualsivoglia Triangolo da un punto preso in un lato.* Sia il triangolo qualunque BCD da dividersi in sette porzioni disuguali, ma che il punto divisorio A sia in un lato CD. Per eseguir tutto questo, pel punto divisorio si faccia la solita preparazione, col tirare le due linee de' quadranti AI, AE, le quali s'intersecano in A ad angolo retto, e dividono il presente triangolo in tre pezzi, in ciaschedun de' quali si eseguisca la necessaria riduzione, affinchè si abbia la particolare quadratura de' medesimi, ed unite insieme poi, conosceremo che la quadratura totale sia 2295. Questa quadratura si deve dividere in modo, che sia A di 368, B di 290, C di 185, D di 460, E di 320, F di 368, e G di 304, mentrechè il primo lato di appoggio sia AH, una delle linee de' quadranti. Fig. 90

Per dare ad A la porzione 368, si osservi, che dovendoci servire di AH per lato di appoggio, noi abbiamo 175 nel primo pezzo AHD, per cui il dippiù 193 lo dobbiamo tagliare dal pezzo susseguente. Ora essendo AH il lato di appoggio, dovrà essere HF il lato della incidenza; e poichè questi due lati non si uniscono in H ad angolo retto, così noi la parte 193, che dobbiamo prendere, la taglieremo a triangolo rettangolo, ed indi ritroveremo un triangolo obbliquangolo, uguale alla quantità che si divide. Quindi dividendo 193 per $17\frac{1}{2}$; metà di AH, avremo per quoziente $11\frac{1}{11}$; per cui dall'estremo H tireremo l'alzata esterna MK, lunga $11\frac{1}{11}$, e poi dal punto K tireremo la parallela KL, che determina in L il punto dell'incontro nel lato d'incidenza; e finalmente tirata AL, la medesima sarà la divisoria per la porzione di A compresa in tutto il triangolo ALD.

Per dare a B la porzione 290, poichè dobbiamo servirci del medesimo lato di appoggio AH, e del medesimo lato d'incidenza HF, così noi uniremo il quantitativo ALH di 193, e la parte di B di 290, ed avremo in tutto 483. Diviso adunque 483 per $17\frac{1}{2}$, metà di AH, avremo per quozien-

te la lunghezza $27 \frac{11}{13}$; per cui dall'estremo H tireremo l'alzata HM della stessa lunghezza, e poi dal punto M tireremo la parallela MN, la quale tocca in N il lato d'incidenza; e finalmente tirata AN, la medesima sarà la divisoria per B, compresa nel triangolo ANL.

Per dare a C la porzione 185, perchè ci serviamo del medesimo lato di appoggio, e d'incidenza, così uniremo il residuo di A, la parte di B, e quella di C, ed avremo in tutto 668. Dividendo questo 668 per $17 \frac{1}{2}$, metà di AH, avremo $58 \frac{1}{3}$ per quoziente, per cui facendo tanto lunga l'alzata HO tirata dall'estremo H, e poi tirata la parallela OP finchè tocchi il lato d'incidenza nel punto P dell'incontro, tireremo AP, la quale sarà la divisoria per la parte di C contenuta nel triangolo APN. Eseguiti così questi tagli, ci resta di tutto il pezzo FAH la porzione AFP di 312, la quale, come un residuo, entra a far parte dell'altra porzione prossima, che si dovrà tagliare nel pezzo seguente.

Per dare a D la porzione 460, poichè abbiamo 312 nel residuo AFP, così il di più 148 lo dobbiamo prendere nel pezzo seguente, e sarà AF il lato di appoggio, ed FB il lato d'incidenza. Diviso adunque 148 per 28, metà di tutto AF, avremo per quoziente $5 \frac{1}{4}$. Quindi dall'estremo F si tiri l'alzata interna FS lunga $5 \frac{1}{4}$, e poi dal punto S si tiri la parallela SR, finchè tocchi in R il lato d'incidenza, e tirata finalmente AR, la medesima sarà la divisoria per la porzione di D compresa da tutto il triangolo ARP.

Per dare ad E la porzione 520, si osservi, che dovendoci servire di AF per lato di appoggio, non potrà essere FB il lato d'incidenza, ma sarà il lato BC. E poichè il lato AF di appoggio non è unito ad angolo col lato CB d'incidenza, quantunque sieno convergenti verso B, ed F, così noi distendendo ambidue, finchè si uniscono nel punto Q della convergenza, avremo formato un gran triangolo rettangolo QGC, laddove prima era un trapezio quadrilatero rettangolo BFGC, dal quale esce fuori il triangolo straniero QBF, di cui fa mestieri di calcolarne l'altezza BE, la base QF, e tutta la quadratura QBF, e ci ritroveremo così nel caso dell'apparecchio straniero angolare. Per caleolare questo apparecchio straniero, si osservi, che noi abbiamo il lato FE di 10 misurato prima nella riduzione; abbiamo ancora l'altezza BE di 6 per la stessa ragione; ci resta soltanto di caleolare il resto EQ, e poi tutta la straniera qua-

dratura di questo angolare apparecchio. Per ritrovare questo resto EQ si faccia così. Si finga di tirare dal punto B una perpendicolare BY sopra CG, la quale sarà uguale e parallela ad EG, e dividerà di tutto CG la parte CY di 24 dal resto YG di 6. Fatto questo, si dica: come CY di 24 sta ad YB di 60, così tutto CG di 30 a tutto GQ quarto proporzionale, il quale sarà 75, e dal quale sottratta la lunghezza già nota GE di 60, ci rimane il residuo EQ di 15. Conosciuto questo, avremo tutta la base QF di 25, e l'altezza EB di 6, e moltiplicando la base 25 per 3, metà dell'altezza, il prodotto 75 sarà la quadratura di tutto l'apparecchio straniero angolare.

Di questo calcolato apparecchio noi ci dobbiamo servire per tagliare la porzione di E di 320, servendoci di tutto AQ per lato di appoggio, e di QC per lato d'incidenza. Si unisca dunque il residuo di D di 148, la parte di E di 320, e l'apparecchio straniero 75, ed avremo in tutto 543. Questa somma dunque 543 si divida per 40 $\frac{1}{2}$, metà di tutto il lato di appoggio AQ, ed avremo per quoziente 13 $\frac{1}{2}$, il quale dinota la lunghezza dell'alzata, che dall'estremo Q si dovrebbe innalzare. E poichè tirarla da questo punto arreca un poco d'imbarazzo, così noi ci serviremo del prolungamento della perpendicolare EB, che vale lo stesso, e così sempre faremo in tutti i casi, che verranno in appresso. Quindi dal punto E si tiri l'alzata ET di 13 $\frac{1}{2}$, e dal punto T si tiri la parallela TV, la quale tocca il lato della incidenza nel punto V; e finalmente tirata AV, la medesima sarà la divisoria della porzione di E compresa AVBR.

Per dare ad F la parte 368, poichè dobbiamo servirci del medesimo lato di appoggio AF, e non potendo essere quello della incidenza FB, ma sarà BC, così ci sarà di mestieri servirci del medesimo artificio dell'apparecchio straniero angolare, il quale perchè calcolato per l'antecedente porzione, non occorre di nuovo ripeterlo. Quindi avremo il residuo di D di 148, la parte di E di 320, la parte di F di 368, e l'apparecchio straniero 75, ed avremo la somma di 911. Diviso dunque 911 per 40 $\frac{1}{2}$, metà di tutto AQ, avremo per quoziente 22 $\frac{1}{2}$, il quale dinota l'alzata, che dall'estremo Q si dovrebbe tirare, e che noi tireremo da E sinò ad X, e tirata poi la parallela XZ, la quale tocca in Z il lato della incidenza; e finalmente tirata AZ, la medesima sarà la divisoria per la parte di F contenuta nel triangolo AVZ.

Il resto di tutta la figura, compreso da AZC è la porzione di G di 304. La prova di queste operazioni eseguite nel presente triangolo, ella è di sommare tutte le porzioni, le quali prese insieme, debbono essere uguali alla totale quadratura del triangolo diviso.

15. *Dividere qualsivoglia Triangolo da un punto preso nello spazio.* Sia il triangolo qualunque BCD da dividersi in sette porzioni, ma che il punto divisorio A sia nello spazio. Per eseguire questa divisione, pel punto divisorio si faccia la solita preparazione col tirare le due linee de' quadranti KF, GL, le quali s'intersecano in A ad angoli retti, e dividono il triangolo in quattro pezzi, in ciascheduno de' quali si faccia la necessaria riduzione per avere la particolare quadratura de' medesimi, ed unite poi insieme sapremo, che la totale quadratura sia 2070. Questa quadratura sia divisa in modo, che A sia di 290, B di 260, C di 370, D di 290, E di 300, F di 250, e G di 310, e sia la linea de' quadranti AL il primo lato di appoggio.

Per dare ad A la porzione 290, poichè il lato di appoggio è AL, e quello d'incidenza è LD, perciò divideremo la porzione 290 per 10, metà di AL, ed avremo per quoziente 29. Dall'estremo L si tiri l'alzata LM lunga 29, e poi la parallela MN, e tirata AN, la medesima sarà la divisoria per A.

Per dare a B la porzione 260, si osservi, che se ci vogliamo servire di AL per lato di appoggio, non potrà essere LD il lato della incidenza, ma sarà DF, sopra del quale cade la divisoria. E poichè questi due lati AL, FD non possono unirsi ad angolo, perchè sono divergenti, così noi lasceremo AL, e faremo lato di appoggio l'altra linea de' quadranti AF, facendo il taglio alla rovescia, il quale va eseguito così. Poichè il pezzo ALDF contiene di quadratura 660, dal quale si è tagliata la parte di A di 290, così ci rimane 370 contenuto da ANDF. Ora da questo residuo sottraendo ancora la parte di B di 260, ci resterebbe l'ultimo residuo 110; e questo residuo appunto è quello, che noi taglieremo, servendoci di AF per lato di appoggio, e di FD per quello d'incidenza, affinchè resti distinta la porzione di B. Diviso adunque 110 per 15, metà di AF, avremo per quoziente $7\frac{2}{3}$. Dall'estremo F si tiri l'alzata FO interna, e lunga $7\frac{2}{3}$, e poi la parallela OP; e finalmente tirata AP, la medesima sarà la divisoria richiesta, che separa la porzione di

B di 260, contenuta da APDN, dal residuo triangolare AFP di 110 di tutto il pezzo, e che deve entrare a far parte della porzione prossima, che si taglia dal pezzo, che segue.

Per dare a C la porzione 370, si rifletta, che noi abbiamo 110 nel residuo AFP, per cui il di più 260 lo dobbiamo prendere nell'altro pezzo, servendoci di AF per lato di appoggio, e di FG per quello d'incidenza. Diviso adunque 260 per 15, metà di AF, avremo $17 \frac{2}{3}$ per quoziente; per cui dall'estremo F tirata l'alzata esterna FQ lunga $17 \frac{2}{3}$, e poi la parallela QR, e finalmente AR, questa sarà la divisoria per C contenuta da tutto ARP. Fatto questo taglio, ci rimane di tutto questo pezzo, il residuo triangolare AGR di 190, che entra a far parte dell'altra porzione, la quale si prenderà da noi nel pezzo seguente.

Per dare a D la porzione 290, poichè abbiamo nel pezzo antecedente un residuo 190, perciò dovremo prendere il di più 100 dall'altro pezzo, servendoci di AG per lato di appoggio. E poichè servendoci di questo lato di appoggio, quello dell'incidenza non potrà essere GB, ma sarà BK, i quali poichè sono convergenti verso i punti B, e G, li potremo unire nel punto della convergenza, e servirci del calcolo dello apparecchio straniero angolare. Ma poichè questo metodo arreca un poco di fastidio, così noi lo lasceremo nel caso presente, e ci serviremo del taglio alla rovescia, che riesce più facile. Essendo tutto il pezzo AGBK di 410, e dovendone lasciare sopra del lato AG una porzione di 100, così noi la taglieremo alla rovescia, servendoci di AK per lato di appoggio, e di KB per lato d'incidenza. Si sottragga 100 da 410, ed avremo il residuo 310. Diviso adunque 310 per 10, metà di AK, avremo per quoziente 31. Si tiri dunque dall'estremo K l'alzata esterna KS lunga 31, e poi la parallela SV, e parimente la retta AV, la quale sarà la divisoria di D, la cui parte è contenuta da tutto AVBR, rimanendo il pezzo AVK di 310, e l'altra sua parte divisa AVBG di 100, che si doveva tagliare.

Per dare ad E la porzione 300, ci serviremo dello stesso metodo usato per l'antecedente porzione. Quindi sottraendo da tutto AVK di 310 la parte E di 300, ci rimane il residuo 10. Questo residuo adunque taglieremo alla rovescia, servendoci di AK per lato di appoggio, e di KB per lato d'incidenza. Diviso dunque 10 per 10, metà di AK, avremo 1 per quoziente; per cui dal punto K tireremo l'al-

zata KH lunga 1, e poi la parallela HE, e finalmente la divisoria AE, la quale separa la parte di E, contenuta dal triangolo AEV, dal residuo triangolare AEK di 10, che entra a far parte dell'altra porzione.

Per dare ad F la porzione 250, poichè noi abbiamo 10 nel residuo triangolare AEK, così il dippiù 240 lo dobbiamo prendere nell'ultimo pezzo, servendoci di AK per lato di appoggio, e di KC per lato d'incidenza. Diviso adunque 240 per 10, metà di AK, avremo per quoziente 24. Si tiri dall'estremo K l'alzata interna KI lunga 24; e poi la parallela IZ, e finalmente AZ, la medesima sarà la divisoria di F, compresa da AEZ. Finalmente la porzione ultima di G di 310 è contenuta da AZCL, come è manifesto.

Fig. 9^a 16. *Dividere qualsivoglia Trapezio ad angoli sporgenti da un punto preso in un lato.* Sia il trapezio ad angoli sporgenti BCDEFG da dividersi in otto porzioni, ma che il punto divisorio A sia in un lato BG. Per eseguir questa divisione, si faccia nel trapezio la solita preparazione con tirare le due linee de' quadranti HI, AD, le quali intersecandosi in A ad angoli retti, dividono il trapezio in tre pezzi, in ciascheduno de' quali si faccia la necessaria riduzione, acciò possiamo conoscere la quadratura particolare di ciascheduno di essi tre pezzi, e questa quadratura particolare si noti dirimpetto a ciascheduno de' pezzi per comodo della divisione. Così avremo pel pezzo AVG la quadratura 45, pel pezzo VAD sarà 99½, e pel pezzo DAB sarà 577. Queste quadrature particolari si sommino, ed avremo per quadratura totale 1618, che debba dividersi in otto porzioni, delle quali sia A di 36, B di 168, C di 210, D di 96, E di 384, F di 290, G di 290, ed H di 144, e che la linea VA de' quadranti sia il primo lato di appoggio.

Per dare ad A la sua porzione 36, poichè il pezzo AGV ne contiene 45, così il residuo 9 lo taglieremo dal medesimo, servendoci di AV per lato di appoggio, e di VG per lato d'incidenza. Quindi diviso 9 per 9, metà di AV, il quoziente 1 darà la lunghezza dell'alzata esterna VL, e tirata la parallela LM, la linea poi AM sarà la divisoria per A, la cui porzione è contenuta da AMG, rimanendo un residuo AVM di 9, il quale entra a far parte della seguente porzione.

Per dare a B la sua porzione 168, si osservi, che avendone 9 nel residuo AVM del primo pezzo, il dippiù 159

lo dobbiamo prendere dall'altro pezzo. Inoltre perchè ci dobbiamo servire di AV per lato di appoggio, e non potendo essere VF quello d'incidenza, ma deve essere FE, così questi due lati non essendo uniti ad angolo, sebbene convergenti, noi li uniremo distendendo ambidue, finchè si uniscono in X punto della convergenza, ed istituiremo in questo caso il calcolo dell'apparecchio straniero angolare. Per calcolare lo straniero VFK si avverta, che noi conosciamo VI di 12, che è una porzione della base del triangolo straniero, e sappiamo ancora IF di 6, che è la perpendicolare, o sia l'altezza, ci resta solo di sapere il residuo IK della base, e la sua quadratura. Per sapere il residuo IK si faccia così. Fingiamo, che dalla linea EZ di 34 si tiri una perpendicolare sino ad F, che sarà 8, perchè uguale, e parallela a ZI, e questa perpendicolare taglierà della linea EZ la parte 28 verso E, la parte 6 verso Z, comechè uguale, e parallela ad FL. Fatto questo, si dica. Come la parte 28 sta alla perpendicolare 8, così tutta la linea EZ di 34 a tutta ZK quarto proporzionale. Fatto il calcolo, ritroveremo ZK, di $9\frac{1}{2}$, e perchè ZI è di 8, così IK sarà di $1\frac{1}{2}$, ed in conseguenza tutta la base KV di $13\frac{1}{2}$; per cui moltiplicando questa base per 3, metà dell'altezza IF, il prodotto $41\frac{1}{2}$ sarà la quadratura dell'apparecchio straniero angolare VFK.

Eseguito tutto questo, perchè dobbiamo tagliare 159 per la parte di B, sarà AK il lato di appoggio, e KE quello della incidenza. Uniremo dunque la porzione di B di 159, e l'apparecchio straniero $41\frac{1}{2}$, ed avremo la somma $200\frac{1}{2}$, la quale divisa per $15\frac{2}{3}$, metà di tutto AK, avremo per quoziente $12\frac{4}{3}$, il quale indica la lunghezza IN dell'alzata esterna, e tirata la parallela NO, la linea poi AO sarà la divisoria per la porzione di B, la quale viene contenuta da tutto il pezzo AOFM.

Per dare a C la porzione 210, perchè dobbiamo servirci dello stesso lato di appoggio AV, e quello della incidenza deve essere FE, così senza ripetere le stesse cose dette antecedenemente, ci dobbiamo servire del medesimo apparecchio straniero angolare. Quindi uniremo l'apparecchio $41\frac{1}{2}$, la porzione residua di B di 159, e quella di C di 210, ed avremo la somma di $410\frac{1}{2}$, la quale divisa per $15\frac{2}{3}$, metà di tutto AK, il quoziente $25\frac{2}{3}$ darà la lunghezza dell'alzata esterna IP, e tirata poi la parallela PQ, la linea

AQ sarà la divisoria per la parte di C compresa dal triangolo AQO.

Per dare a D la porzione 96, perchè dobbiamo servirci del medesimo lato di appoggio, e dello stesso lato d'incidenza, così bisognerà servirci del medesimo apparecchio straniero. Uniremo adunque l'apparecchio $41 \frac{2}{3}$, il residuo di B di 159, la parte di C di 210, e quella di D di 96, ed avremo la somma $506 \frac{2}{3}$, la quale divisa per $15 \frac{2}{3}$, metà di tutto AK, il quoziente $31 \frac{1}{3}$ darà la lunghezza dell'alzata IR, e tirata poi la parallela RS, la linea AS sarà la divisoria per la parte di D racchiusa dal pezzo ASQ.

Per dare ad E la porzione 384, si osservi che se vogliamo servirci di AV per lato di appoggio, quello d'incidenza non potrà essere VF, e neppure FE, ma sarà ED, per cui sarà impossibile servirci di AV per lato di appoggio. Ci serviremo dunque di AD per lato di appoggio, e di DE per quello d'incidenza, e faremo uso nel caso presente del taglio alla rovescia. Poichè tutto il pezzo DAV contiene di quadratura 996, così sottraendo dal medesimo il residuo di B, la parte di C, e quella di D, ci rimane 531. Ora poichè E deve avere 384, perciò sottraendo il minore dal maggiore, avremo 147 per residuo, e questo è quello, che taglieremo, servendoci di AD per lato di appoggio, e di DE per lato d'incidenza. Quindi 147 diviso per 23, metà di AD, il quoziente $6 \frac{3}{23}$ darà la lunghezza dell'alzata DT, e tirata la parallela TX, la linea AX sarà la divisoria per la porzione di E compresa da AXES, e separa dalla medesima il residuo triangolare ADX di 147, che entra a far parte della porzione, che si prende dall'altro pezzo.

Per dare ad F la porzione 290, poichè abbiamo 147 nel triangolo residuo ADX, il di più 143 lo prenderemo nel pezzo seguente, e sarà AD il lato di appoggio, e DC il lato d'incidenza. Dividendo dunque 143 per 23, metà di AD, il quoziente $6 \frac{1}{23}$ darà la lunghezza dell'alzata esterna DY, e tirata la parallela YZ, la linea AZ sarà la divisoria per la porzione di F, contenuta da AZDX.

Per dare a G la porzione 290, si osservi, che servendoci di AD per lato di appoggio, quello della incidenza non può essere DC, ma deve essere CB; e perchè il lato di appoggio, e d'incidenza non sono convergenti verso i punti D, e C, perciò sarà impossibile di fare questo taglio per la via diretta, e perciò faremo il taglio alla rovescia, servendoci di AH

per lato di appoggio, e di BC per quello d'incidenza. Quindi poichè tutto il pezzo BAD è di 577, dal quale si è tolto AZD di 143, così ci rimane il residuo 434. Ora sottraendo da questo la parte di G di 290, l'ultimo residuo 144 sarà quello, che taglieremo, servendoci del lato di appoggio AH, e di quello d'incidenza BC. E perchè questi due lati non sono uniti ad angolo, quantunque convergenti, così forza è, che noi distendiamo CB, finchè si unisca in R col lato di appoggio, e ne nasce così un triangolo straniero BRA, che bisogna calcolare, ed in questo modo formeremo l'apparecchio straniero laterale.

Questo triangolo straniero BRA, che forma l'apparecchio straniero laterale, deve essere calcolato; per cui dobbiamo sapere l'altezza BH, e la base RA, e tutta la sua quadratura. Per riguardo all'altezza BH è già noto essere di 8 per la riduzione. Persapere la base RA si faccia così. Si finga dal punto C tirata una linea, che sia parallela alla linea della riduzione 36, che non oltrepassi la distanza di H; indi dal punto della direzione B si cali una perpendicolare sino a B, che sarà 3, comechè uguale, e parallela alla perpendicolare, che si è calata da C; e finalmente dal suo estremo si cali l'altra perpendicolare, che si unisca ad H, e che sarà anche 3. Fatto questo, si vede chiaro, che la prima perpendicolare tirata dalla linea esterna sino a B separa la parte 28 dall'altra parte 8. Eseguito questo, si dica: Come la parte 28 della linea esterna sta a 3 altra linea tirata sino a B; così tutta la linea 36 a tutta quella, che si estende sino ad R, che è il quarto proporzionale. Fatto il calcolo, si trova $5\frac{6}{7}$ questo quarto proporzionale; e perchè la porzione del lato sino ad H è di 3, così resta HR solamente di $\frac{6}{7}$. Ora essendo tutto AH di 14, resterà AR di $13\frac{2}{7}$; che è appunto la lunghezza della base, che si cercava. Moltiplicando dunque la base $13\frac{2}{7}$ per $4\frac{1}{2}$ metà, dell'altezza, il prodotto $52\frac{4}{7}$ sarà la quadratura dell'apparecchio straniero laterale.

Poichè dobbiamo tagliare alla rovescia la quadratura residua 144, e dovendo essere ora AR di $13\frac{2}{7}$ il lato di appoggio, ed RC quello della incidenza, ed essendoci stato bisogno dell'apparecchio straniero laterale, che si è calcolato $52\frac{4}{7}$, così uniremo queste due quantità, ed avremo la somma $196\frac{4}{7}$. Divisa adunque questa somma per $6\frac{4}{7}$, metà di AR, il quoziente $29\frac{4}{7}$ darà la lunghezza dell'alzata interna RN, dal cui estremo N tirata la parallela NV, la linea AV sarà la

divisoria per la porzione di G, compresa da AVCZ. Finalmente il resto AVB di 144 sarà la porzione ultima spettante ad H.

17. Dividere qualsivoglia trapezio ad angoli sporgenti da un punto preso nello spazio. Sia il trapezio ad angoli sporgenti BCDEFG da dividersi in sette porzioni, ma che il punto divisorio A sia nello spazio. Si faccia in primo luogo la solita preparazione, col tirare le due linee de' quadranti BH, IL, le quali s'intersecano in A ad angoli retti, e dividono il trapezio in quattro pezzi, in ognuno de' quali si faccia la necessaria riduzione, acciò si abbia la quadratura di ognuno di essi, la quale si noti poi dirimpetto ad ogni pezzo fuori del trapezio. Fatto questo, avremo pel pezzo BAL la quantità 128, per LAH sarà 432, per HAI sarà 646, e per IAB sarà 384. Si sommino questi quattro pezzi, ed avremo per totale quadratura 1590, che debba dividersi in sette porzioni, delle quali A sia di 200, B di 265, C di 248, D di 280, E di 256, F di 121, e G di 220, e che la linea de' quadranti AB sia il primo lato di appoggio.

Per dare ad A la porzione 200, si osservi, che nel primo pezzo BAL ne abbiamo 128, per cui il dippiù 72 lo dobbiamo prendere nel pezzo seguente, e sarà AL il lato di appoggio. Ora essendo questo il lato di appoggio, e la divisoria non cadendo sopra LG, ma sopra GF, così questo sarà il lato d'incidenza. E perchè questo lato d'incidenza, e quello di appoggio non sono uniti ad angolo, ma sono convergenti, così noi stenderemo ambidue, e li uniremo nel punto K della convergenza, e ne nascerà il triangolo straniero GLK, che bisogna calcolare, e ci serviremo in questo taglio dell'apparecchio straniero angolare. Quindi ritroveremo prima la base LK, dicendo così. Come FS di 24 sta ad SG di 8, così tutto FV di 28 a tutto VK, quarto proporzionale, che si trova $9\frac{1}{2}$, dal quale sottratto VL di 4, resta LK di $5\frac{1}{2}$, che è la base del triangolo straniero. L'altezza di questo triangolo sarà 4, comechè eguale ad SV, e quindi moltiplicando la base $5\frac{1}{2}$ per 2, metà dell'altezza, il prodotto $10\frac{1}{2}$ sarà la quadratura dell'apparecchio straniero angolare. Fatto questo, alla quantità 72, che dobbiamo tagliare, si unisca l'apparecchio straniero $10\frac{1}{2}$, ed avremo la somma $82\frac{1}{2}$. Questa somma si divida per $10\frac{1}{2}$, metà di tutto AK, ed il quoziente $7\frac{1}{6}$ darà la lunghezza dell'alzata esterna sino ad M, e tirata poi la parallela MN, la linea AN sarà la divisoria per A, la cui porzione è compresa da BAN.

Per dare a B la porzione 265, si osservi, che volendoci servire di AL per lato di appoggio, quello d'incidenza non potrà essere LG, e neppure GF, ma sarà FH, per cui sarà impossibile di servirci di AL, ma ci serviremo di AH per lato di appoggio, e di HF per quello d'incidenza, ed useremo il metodo del taglio alla rovescia, facendo così. Perchè dal pezzo LAH di 432 abbiamo tagliato il residuo 72, così ci è rimasto 360, e perchè B è di 265, perciò sottraendo questo da 360, vi resta il residuo 95, che taglieremo. Diviso dunque 95 per 12, metà di AH, il quoziente $7 \frac{1}{2}$ darà la lunghezza dell'alzata interna HO, e tirata poi la parallela OP, la linea AP sarà la divisoria, che separa la parte di B, compresa da PAN, dal residuo triangolare AHP di 95, che deve entrare a far parte dell'altra porzione, che si taglia dal pezzo seguente.

Per dare a C la porzione 248, si osservi, che abbiamo il residuo 95 nel triangolo AHP, per cui il di più 153 lo taglieremo dal pezzo seguente, servendoci di AH per lato di appoggio, e di HE per lato d'incidenza. Diviso adunque 153 per 12, metà di AH, il quoziente $12 \frac{1}{2}$ darà la lunghezza dell'alzata esterna HQ, e tirata la parallela QR, la linea AR sarà la divisoria per C contenuta da tutto RAP.

Per dare a D la porzione 280, se ci serviremo di AH per lato di appoggio, quello d'incidenza non può essere HE, ma sarà ED. Ora potendosi fare in questo caso l'apparecchio straniero angolare, noi però lo lasceremo, perchè si dovrebbe calcolare una gran quantità, ed invece useremo il taglio alla rovescia, servendoci di AI per lato di appoggio. Quindi perchè il pezzo IAH contiene 646, e dal quale si è tolta la porzione 153, residuo di C, ci rimane solamente 493. E poichè la porzione di D è di 280, così sottraendo il minore dal maggiore, il residuo 213 taglieremo, servendoci di AI per lato di appoggio. Ora perchè la divisoria per 213 non cade in ID, ma in DE, come lato d'incidenza, e non essendo questi due lati uniti ad angolo, sebbene convergenti, così noi distenderemo ambidue, finchè si uniscano nel punto V della convergenza, e faremo uso dell'apparecchio straniero angolare DIV, del quale bisogna calcolare la base, l'altezza, e tutta la sua quadratura.

Per ritrovare la base IV si dica così. Come EB di 16 sta a BD di 6, così tutto EG di 18 a tutto GV, quarto proporzionale, che si trova $6 \frac{1}{2}$; e perchè GI è di 4, così resta IV

di $2\frac{1}{2}$, che è la base richiesta. L' altezza di questo triangolo straniero essendo uguale a GB, sarà anche 2, per cui moltiplicando la base $2\frac{1}{2}$ per uno, metà dell' altezza, il prodotto $2\frac{1}{2}$ sarà la quadratura di tutto l' apparecchio straniero angolare. Eseguito questo, uniremo l' apparecchio $2\frac{1}{2}$ colla quantità 213 da tagliarsi, ed avremo la somma $215\frac{1}{2}$, la quale divisa per $20\frac{1}{2}$, metà di tutta AV, il quoziente $10\frac{2}{3}$ darà l' alzata esterna sino ad S, e tirata la parallela ST, la linea AT sarà la divisoria per la parte di D, compresa da TAR, restando il residuo TAI di 213, il quale entra a far parte della seguente porzione.

Per dare ad E la porzione 256, si osservi, che abbiamo 213 nel pezzo residuo IAT, per cui il resto 43 lo taglieremo dal pezzo seguente, e sarà AI il lato di appoggio, ed IC quello d'incidenza. Diviso dunque 43 per 19, metà di AI, il quoziente $2\frac{2}{19}$ darà l' altezza IX, e tirata la parallela XY, la linea AY sarà la divisoria per E compresa da tutto TAY.

Per dare ad F la parte 121, poichè dobbiamo servirci del medesimo lato di appoggio AI, e del medesimo lato d'incidenza IC, così uniremo il residuo IAY di 43, e la parte di F di 121, ed avremo la somma 164, la quale divisa per 19, metà di AI, il quoziente $8\frac{5}{19}$ darà l' alzata esterna IZ, e tirata la parallela ZN, la linea AN sarà la divisoria per F, contenuta da NAY. Finalmente il residuo ultimo NAB di 220 sarà la porzione spettante a G.

Questi esempi stiniano essere sufficientissimi per saper dividere qualsivoglia triangolo, e qualsisia trapezio ad angoli sporgenti. Veniamo ora a stabilire le regole per la divisione de' trapezii ad angoli rientranti, i quali richiedono un maggiore preparativo.

18. *Dato un Trapezio rettangolo, che abbia un angolo rientrante, ridurlo a capotagliato, con calcolare tutta la parte che si toglie.* Sia il trapezio rettangolo ABIGD, che abbia un angolo rientrante D. Si cerca di ridurre il medesimo a capotagliato, servendoci del lato IG. Per eseguirlo, non si deve far altro, che il lato AD si distenda per DH, ed avremo in questa maniera formato il capotagliato AHIB, e separato dal medesimo il triangolo GDH, del quale fa uopo calcolare la base GH, la perpendicolare che si abbassa da D sopra la base, e tutta la sua quadratura.

Per ritrovare la lunghezza della base GH si faccia così. Dall' estremo A del lato opposto AB si tiri la perpendico-

lare AF uguale, e parallela BI, e si unisca FG in diretto con IG, e si distenda ED sino a G. Fatto questo, avremo le seguenti lunghezze. Sarà AC di 5, comechè uguale, e parallela a BE, sarà CF di 8 per la stessa ragione, sarà CD di 7, giacchè sottratto ED da tutto AB, il residuo sarà CD, e finalmente FG sarà 3 per la stessa ragione. Conosciuto tutto questo, per ritrovare la base GH si dica. Come AC di 5 sta a CD di 7, così tutto AF di 13 a tutto FH, che si trova $18\frac{1}{2}$. E poichè FG è di 3, così la base GH sarà $15\frac{1}{2}$. Per ritrovare la perpendicolare, che si tirerebbe dal punto D sopra GH, ci serviremo di CF di 8, ovvero EI, che è lo stesso. Quindi moltiplicando la base $15\frac{1}{2}$ per 4, metà dell'altezza, il prodotto $60\frac{1}{2}$ sarà la quadratura del triangolo GDH, che si è tolto, e che si voleva sapere.

Sia inoltre il trapezio rettangolo ABIFD, che abbia un Fig. 95
angolo rientrante in D. Si cerca ridurre il medesimo a capotagliato, servendoci del lato IF. Per eseguire tutto questo, il lato AD si distenda a dirittura per DH, e così avremo il capotagliato AHIB, ed escluso il triangolo FDH, di cui si deve calcolare la lunghezza della base FH, la perpendicolare che si abbasserebbe dal punto D sopra la base, e tutta la sua quadratura.

Per ritrovare la lunghezza della base FH, dall'estremo A del lato opposto AB, si abbassi la perpendicolare AG, che sarà uguale e parallela a BI, e la quale taglierà la parte GF di 5 da tutto FI di 25, essendo AB di 20. Resta solo di calcolare GH, per avere tutta la base FH. Per calcolarla, il lato ED di 12 si distenda sino in C, e sarà DC di 8, AC di 6, perchè uguale ad EB, e CG di 5 per la stessa ragione. Quindi si dica. Come AC di 6 sta a CD di 8, così tutto AG di 11 a tutto GH, che si trova $14\frac{1}{2}$. Ora unendo GH di $14\frac{1}{2}$ con GF di 5, avremo $19\frac{1}{2}$ per tutta la base FH. Per la perpendicolare che si dovrebbe abbassare dal punto D, ci serviremo della sua uguale EI di 5, ovvero CG; per cui moltiplicando la base $19\frac{1}{2}$ per 2 $\frac{1}{2}$, metà dell'altezza, il prodotto $49\frac{1}{2}$ sarà la quadratura di tutto il triangolo FDH, che era il residuo del capotagliato.

La pratica di questo necessario problema; noi la chiameremo sempre in appresso *Apparecchio interno triangolare*, perchè si calcola un triangolo tagliato da un trapezio, che gli appartiene.

19. Dato un Trapezio rettangolo che abbia un angolo

rientrante, ridurlo a parallelogrammo rettangolo con calcolare lo straniero, che si aggiunge. Sia il trapezio rettangolo ABIGD, che abbia un angolo rientrante D. Si cerca ridurlo a parallelogrammo rettangolo, con calcolare tutto l'aggiunto straniero. Per eseguire questo problema, dall'estremo A del lato più lungo AB si tiri la perpendicolare AF uguale, e parallela a BI, ed indi si unisca FG in diretto con GI, ed in questo modo da trapezio rettangolo sarà divenuto parallelogrammo rettangolo ABIF, del quale AFGD sarà lo straniero, che bisogna calcolare. Per calcolarlo, si tiri ED sino in C, e sarà DC di 7, AC di 5, CF di 8, ed FG di 3. Quindi moltiplicando DC di 7 per $2\frac{1}{2}$, metà di AC, il prodotto $17\frac{1}{2}$ sarà la quadratura del triangolo ACD. Inoltre la somma 10 de' due lati CD, FG del capotagliato FD moltiplicata per 4 metà dell' altezza FC, il prodotto 40 sarà la quadratura del capotagliato FD. Ora unendo queste due straniere quadrature, avremo la somma $57\frac{1}{2}$, che dimostra la quadratura di tutto l' aggiunto ricercato.

La esecuzione di questo problema noi la diremo sempre in appresso *apparecchio straniero quadrangolare*, giacchè col medesimo si riduce a figura quadrilatera regolare un trapezio rettangolo.

20. *Dato un Trapezio ad angoli rientranti, calcolare l'apparecchio straniero angolare, che contenga molti lati del Trapezio.* Sia il trapezio ad angoli rientranti ABDEF, nel quale si faccia la interna riduzione per averne la sua quadratura. Fingiamo, che dal punto A debba tirarsi una divisoria, servendoci del lato di appoggio AB. Se la divisoria cadesse nel lato BI, in questo caso si comprende facile l'operazione; se cadesse in IH si userebbe l'apparecchio interno triangolare, come è chiaro a capirsi; ma noi supponiamo, che la divisoria non cada nè in BI, nè in IH, nè in HG, nè in GD, ma che cada nel lato DE della incidenza. Poichè dunque il lato di appoggio AB, e quello d'incidenza ED differiscono di tanti lati, e sono tra di loro convergenti, così noi stendendo ambidue, li uniremo in C, e ne nasce il pezzo straniero, che bisogna calcolare. Per calcolarlo si faccia così. Dal punto E si tiri la perpendicolare EL; indi le linee della riduzione si distendano per GO, HP, IQ. Fatto questo, noi abbiamo il gran triangolo rettangolo ELC, del quale il cateto EL vien diviso nelle parti EK di 10 KL di 8, LM di 4, MN di 6, NL di 5,

e dagli estremi di ciascheduna di queste parti si sono tirate le altre rette parallele all'altro cateto LC. Ora di queste rette, porzioni sono dentro del trapezio, e porzioni al di fuori, e che si debbono calcolare. Le porzioni che sono dentro del trapezio sono tutte note, comechè porzioni delle linee della riduzione, per cui avremo KD di 8, LG di 2, MH di 6, NI di 4, ed LB di 8. Ci resta solo di calcolare tutte le rette, che sono al di fuori. Per calcolare la prima GO, si dica. Come EK di 10 sta a KD di 8, così EL di 18 ad LO, che si trova $14\frac{1}{2}$, dal quale tolto GL di 2, resta GO di $12\frac{1}{2}$. Ora nel triangolo DGO sapendo la base GO, e la sua altezza uguale ad LK di 8, avremo la sua quadratura $49\frac{1}{2}$ moltiplicando la base per la metà dell'altezza. Per calcolare la seconda HP si dica. Come EK di 10 sta a KD di 8, così EM di 22 ad MP, che si trova $17\frac{1}{2}$, dal quale tolto MH di 6, resta HP di $11\frac{1}{2}$. Ora del capotagliato HO sapendo i due lati paralleli, che uniti insieme sono $24\frac{1}{2}$, e la sua altezza uguale ad LM di 4, avremo la sua quadratura 48, moltiplicando la somma de' lati paralleli colla metà dell'altezza. Per calcolare la terza IQ si dica. Come EK di 10 sta a KD di 8, così EN di 28 ad NQ, che si trova $22\frac{1}{2}$, dal quale tolto NI di 4, resta IQ di $18\frac{1}{2}$. Ora del capotagliato IP sapendo la somma 30 de' due lati paralleli, e la sua altezza uguale ad MN di 6, avremo la sua quadratura 90, moltiplicando la somma de' due lati paralleli per la metà dell'altezza. Finalmente per calcolare la quarta BC si dica. Come EK di 10 sta a KD di 8, così EL di 33 ad LC, che si trova $26\frac{1}{2}$, dal quale tolto LB di 8, resta BC di $18\frac{1}{2}$. Quindi del capotagliato BQ sapendo la somma $56\frac{1}{2}$ de' due lati paralleli, e la sua altezza uguale ad NL di 5, avremo la sua quadratura 92, moltiplicando la somma dei due lati paralleli colla metà dell'altezza; ed in questo modo avremo calcolata ogni parte di tutto lo straniero nel caso presente.

Eseguite queste operazioni, uniremo in una somma tutte le particolari quadrature di tutte le parti dello straniero, ed avremo $279\frac{1}{2}$ per quadratura totale calcolata di tutto il pezzo straniero. Intanto egli è da riflettersi, che siccome questo straniero abbraccia molti lati del dato trapezio, così questa operazione col nome di *Apparecchio straniero moltilatero* noi la chiameremo sempre in appresso.

21. Dato un Trapezio ad angoli rientranti, calcola-

re l'apparecchio interiore triangolare, che contenga molti lati del trapezio. Sia il trapezio ad angoli rientranti Fig. 97 ABCI, nel quale si faccia la interna riduzione per averne la totale quadratura. Supponiamo, che dal punto A debba tirarsi una divisoria, cou servirci di AI per lato di appoggio. Supponiamo di più, che la divisoria non cada in IH, non in HG, non in GF, non in FE, ma in un punto di ED, per cui sarà questo il lato d'incidenza. Inoltre il lato di appoggio AI, e quello d'incidenza, DE essendo convergenti al di dentro del Trapezio, così noi stenderemo il lato d'incidenza DE, finchè si unisca in L col lato di appoggio; e ne nasce così il pezzo tagliato interiore ELI, che bisogna calcolare, e stabiliremo ancora la lunghezza residua LA del lato di appoggio.

Per calcoliar tutto questo, dal punto D si tiri la perpendicolare RD; ed indi le linee della riduzione che bisogna, si distendano per EK, GN, IR, mentrechè altre restano tagliate dalla perpendicolare per LF, PH. Fatto questo, noi abbiamo il gran triangolo rettangolo DRL, del quale il cateto DR vien diviso nelle parti DK di 6, KL di 4, LN di 5, NP di 4, PR di 3, e dagli estremi di ciascheduna di queste parti si sono tirate le altre rette parallele all'altro cateto RL. Ora di tutte queste altre rette, porzioni sono al di fuori, e porzioni sono avanti tagliate dalla perpendicolare, e che tutte bisogna conoscerle, sapendo le lunghezze delle linee della riduzione. Quindi sarà EK di 2, LF di 1, GN di 2, PH di 2, IR di 2. Ci resta solo di calcolare le altre porzioni di queste rette, che terminano nella ipotenusa DL, come è chiaro.

Per calcolare la prima LM si dica. Come DK di 6 sta a KE di 2, così DL di 10 ad LM, che si trova $3\frac{1}{2}$, al quale aggiunto LF di 1, avremo tutto MF di $4\frac{1}{2}$. Quindi del triangolo MEF sapendo la base, e l'altezza LK di 4, avremo la sua quadratura $8\frac{1}{2}$, col moltiplicare la base per la metà dell'altezza. Per calcolare la seconda GO si dica. Come DK di 6 sta KE di 2, così DN di 15 ad NO, che si trova 5, dal quale tolto GN di 2, resta GO di 3. Ora del capotagliato OF sapendo la somma $7\frac{1}{2}$ de' due lati paralleli, e l'altezza NL di 5, avremo la sua quadratura $18\frac{1}{2}$, moltiplicando la somma de' due lati paralleli per la metà dell'altezza. Per calcolare la terza PQ si dica. Come DK di 6 sta a KE di 2, così DP di 19 a PQ, che si trova $6\frac{1}{2}$, al quale

aggiunto PH di 2, avremo QH di $8\frac{1}{2}$. Quindi del capotagliato OH conoscendo la somma $11\frac{1}{2}$ de' due lati paralleli, avremo la sua quadratura $22\frac{1}{2}$, col moltiplicare la stessa somma per la metà dell' altezza. Per calcolare la quarta IL si dica. Come DK di 6 sta a KE di 2, così tutto DR di 22 a tutto RL che si trova $7\frac{1}{2}$, dal quale tolto IR di 2, resta IL di $5\frac{1}{2}$. Ora del capotagliato QI, conoscendo la somma $13\frac{1}{2}$ de' due lati paralleli, e l' altezza RP di 3, moltiplicheremo la prima per la metà della seconda, ed il prodotto $20\frac{1}{2}$ sarà la sua quadratura.

Eseguito tutto questo, uniremo in una somma tutte le particolari quadrature delle parti del pezzo interiore risecato, ed avremo $70\frac{1}{2}$ per totale quadratura di tutto il pezzo interiore risecato dal trapezio. Di più conosceremo, che il resto LA del lato di appoggio sia $16\frac{1}{2}$, essendo LI di $5\frac{1}{2}$. Finalmente la pratica esecuzione di questo problema noi la chiameremo sempre in appresso *Apparecchio interno multilatero*, giacchè il medesimo sta a fronte di molti lati del dato trapezio.

22. *Dato un Trapezio ad angoli rientranti, calcolare l' apparecchio quadrangolare, che contenga molti lati del trapezio.* Sia il trapezio ad angoli rientranti ABCD nel Fig. 98 quale si faccia la interna riduzione per averne la totale quadratura. Supponiamo, che dal punto B debba tirarsi una divisoria, servendoci indispensabilmente di BA per lato di appoggio, e che questa divisoria non cada in AF, non in FE, neppure in ED, ma in un punto del lato opposto DC, che sarà il lato d' incidenza. Poichè questa lato d' incidenza, ed il lato di appoggio sono paralleli fra di loro, per cui non li possiamo unire, perciò ci serviremo dell' apparecchio straniero quadrangolare. Quindi il lato CD essendo più corto del lato opposto BA, lo stenderemo per DG, e sarà CG uguale a BA; indi tireremo GA uguale e parallela a CB, ed avremo formato un parallelogrammo rettangolo ABCG, laddove prima era un trapezio, ed avremo un pezzo straniero AGD, di cui fa mestieri calcolare tutta la quadratura.

Per calcolar tutto questo, le linee della interna riduzione si distendano per EH, ed FI, ed avremo pel rapporto de' lati, e delle linee di riduzione, le seguenti note lunghezze. Sarà AI di 6, ed IF di 4, e moltiplicando AI per la metà di IF, il prodotto 12 sarà la quadratura del primo

pezzo triangolare straniero AIF. Inoltre abbiamo IH di 6, ed HE di 2, per cui del capotagliato IE conoscendo la somma 6 de' due lati paralleli, e l'altezza 6, e moltiplicando la prima per la metà della seconda, il prodotto 18, sarà la quadratura del capotagliato straniero. Finalmente abbiamo HG di 5, e GD di 6, per cui del capotagliato HA, sapendo la somma 8 de' due lati paralleli, e l'altezza 5, e moltiplicando la prima per la metà della seconda, il prodotto 20 sarà la quadratura dell'ultimo straniero capotagliato.

Eseguito questo, uniremo tutte queste straniere quadrature de' pezzi dell'apparecchio, ed avremo 50 per la totale sua quadratura. Ora questa pratica la diremo sempre in appresso *Apparecchio quadrangolare moltilatero*, comechè contiene molti lati del trapezio. Entriamo intanto, dopo questi preparativi, alla divisione de' trapezii ad angoli rientranti, de' quali porteremo tre esempj, acciò si veggia la pratica degli apparecchi già descritti, e di tutti i casi possibili per la divisione de' medesimi.

23. *Dividere un Trapezio ad angoli rientranti da un punto preso nello spazio.* Per la divisione de' trapezii ad angoli rientranti, noi la faremo col mettere nello spazio il punto divisorio; giacchè volendolo porre in un lato, può accadere il caso della intersecazione, della quale a luogo più opportuno ne daremo la pratica. Intanto di sì fatta divisione ne addurremo tre esempj, de' quali nel primo faremo uso degli apparecchi stranieri, nel secondo ci serviremo degli apparecchi interni, e nel terzo finalmente faremo qualche taglio a capotagliato.

Fig. 99 1. Sia in primo luogo il trapezio ad angoli rientranti BDKM da dividersi in otto porzioni, ma che il punto divisorio A sia nello spazio. Si faccia la solita preparazione, con tirare le due linee de' quadranti VO, SG, le quali intersecandosi in A ad angoli retti, dividono tutto il trapezio in quattro pezzi, in ciascheduno de' quali si faccia la necessaria riduzione, acciò si conosca la quadratura particolare di ognuno di essi quattro pezzi, e questa quadratura particolare si noti dirimpetto a ciascheduno de' quattro pezzi per maggior comodo della divisione. Avremo dunque pel pezzo VAS la quadratura 282, per VAG sarà 320, per GAO sarà 308, e per OAS sarà 291. Si sommino questi quattro pezzi, ed il prodotto 1201 sarà la quadratura totale di tutto il dato trapezio, della quale sia A di 147, B di 132, C di

184, D di 153, E di 192, F di 180, G di 103, ed H di 110, e che la linea de' quadranti AS debba essere il primo lato di appoggio.

Per dare ad A la sua parte 147, essendo AS il lato di appoggio, quello della incidenza non potendo essere SP; non PB, ma il lato BC, ed essendo questo convergente col lato di appoggio, così li uniremo in Q, punto della convergenza, ed avremo l'apparecchio straniero multilatero, che si calcolerà secondo il metodo già descritto. Supponiamo adunque fatto questo calcolo, dal quale conosceremo il lato esterno SQ di $20 \frac{1}{2}$, e tutta la quadratura di questo apparecchio $140 \frac{1}{2}$. Uniremo la parte di A di 147, e la quadratura dell'apparecchio $140 \frac{1}{2}$, ed avremo la somma $287 \frac{1}{2}$, la quale dividendosi per $17 \frac{1}{2}$, metà di tutto AQ, il quoziente $16 \frac{17}{17}$, darà l'alzata esterna RT, e tirata la parallela TX, la linea AX sarà la divisoria per la parte di A.

Per dare a B la porzione 132, poichè la sua divisoria cade nel lato CV, così noi lasceremo AS per lato di appoggio, e ci serviremo di AV, comechè unito a quello d'incidenza, e per questo taglio faremo uso del taglio alla rovescia. Poichè dal pezzo VAS di 282 si è tolta la parte di A di 147, così ci è rimasto 135; e perchè B deve avere 132, così sottraendo il minore dal maggiore, ci resta il residuo 3, che noi taglieremo. Diviso adunque 3 per 10, metà di AV, il quoziente $3 \frac{1}{2}$ darà l'alzata interna VY, e tirata la parallela YZ, la linea AZ sarà la divisoria per B, compresa da XAZ, e ci rimane un residuo triangolare ZAV di 3, che serve per quella porzione, che entra nell'altro pezzo.

Per dare a C la porzione 184, si osservi, che ne abbiamo 3 nel residuo del primo pezzo, per cui dobbiamo tagliarne altri 181 dal secondo pezzo. E poichè servendoci di AV per lato di appoggio, quello d'incidenza sarà DE, così uniremo nel punto di convergenza C l'uno, e l'altro, e ci serviremo dell'apparecchio straniero multilatero CVFD, che bisogna calcolare. Supponiamo eseguito il calcolo di questo apparecchio, del quale sapremo il lato esterno VC di $8 \frac{1}{4}$, e tutta la sua quadratura $64 \frac{1}{4}$. Uniremo dunque questa straniera quadratura, e la parte residua di C, ed avremo la somma $245 \frac{1}{4}$, la quale divisa per $14 \frac{1}{4}$, metà di tutta AC, il quoziente $17 \frac{1}{4}$ darà l'alzata esterna BH, e tirata poi la parallela HL, la linea AI sarà la divisoria per C, contenuta da ZAI.

Per dare a D la parte 153, si osservi, che il pezzo VAG

essendo 320, e dal medesimo essendosi tolto 181, ci è rimasto solo 139, per cui il dippiù 14 lo dobbiamo prendere dall'altro pezzo GAO, servendoci di AG per lato di appoggio, E poichè per questa quantità la divisoria non cade in GH, ma in HK, come lato d'incidenza, e non essendo questi due lati uniti, perciò distendendo ambidue in L, avremo l'apparecchio straniero angolare GHL, che bisogna calcolare. Supponiamo eseguito questo calcolo dell'apparecchio, da cui conosceremo, che il lato esterno GL sia $1\frac{1}{2}$, e la quadratura straniera $\frac{5}{2}$. Ora uniremo questo apparecchio, e la porzione 14, ed avremo in una somma $14\frac{1}{2}$, la quale divisa per $10\frac{1}{2}$, metà di tutto AL, il quoziente $1\frac{1}{5}$ darà l'alzata esterna KM, e tirata la parallela MN, la linea AN sarà la divisoria per D, compresa da IAN.

Per dare ad E la porzione 192, si osservi, che per questa porzione, servendoci di AG per lato di appoggio, quello della incidenza sarà eziandio HK, per cui ci bisogna ancora l'apparecchio straniero angolare GHL. Uniremo dunque l'apparecchio, il residuo di D, e la parte di E, ed avremo la somma 206 $\frac{1}{2}$, la quale divisa per $10\frac{1}{2}$, metà di AL, il quoziente $20\frac{1}{10}$ darà l'alzata KP, la parallela PQ, e la linea AQ sarà la divisoria per E, contenuta da NAQ. Fatto questo, ci resta del pezzo GAO la porzione QAO di 102, che serve per l'altro taglio nel pezzo seguente.

Per dare ad F la porzione 180, si osservi che nel pezzo antecedente abbiamo di residuo 102, per cui il dippiù 78 lo taglieremo dal pezzo che segue, servendoci di AO per lato di appoggio. E poichè il lato d'incidenza, non può essere OM, ma sarà MN, così uniremo questi due lati nel punto di convergenza X, e ci serviremo dell'apparecchio straniero angolare MOX, che bisogna calcolare. Supponiamo intanto già eseguito questo calcolo, dal quale sapremo, che la linea esterna OX sia 17, e tutta la quadratura 85. Unendo dunque l'apparecchio straniero angolare col residuo di F di 78, la somma 163 la divideremo per 16, metà di tutto AX, ed il quoziente $10\frac{1}{8}$ darà l'alzata ST, la parallela TV, e la linea AV sarà la divisoria per la parte di F, la quale è contenuta in VAQ.

Per dare a G la porzione 103, servendoci dello stesso lato di appoggio AO, quello d'incidenza sarà anche MN, per cui ci serviremo del medesimo apparecchio straniero angolare. Uniremo dunque l'apparecchio 85, il residuo di F di 78,

e la parte di G 103, ed avremo la somma 266, la quale divisa per 16, metà di AX, il quoziente $16 \frac{1}{2}$ darà l'alzata SG, la parallela GL, e la linea AL sarà la divisoria per G. Finalmente il resto LAS di 110 di tutto il pezzo sarà la porzione ultima, che spetta ad H; ed in questo modo avremo diviso il dato trapezio, facendo uso degli stranieri apparecchi.

2. Sia in secondo luogo il trapezio ad angoli rientranti BIHKNPRSV, che debba dividersi in undici porzioni, stabilendo il punto divisorio A nello spazio. Per eseguirlo, si faccia in questo trapezio la solita preparazione, con tirare le due linee de' quadranti FD, EB, le quali intersecandosi in A ad angoli retti, dividono tutto il trapezio in quattro pezzi, in ciascheduno de' quali si faccia la necessaria riduzione, acciò si abbia la quadratura particolare di ognuno de' quattro pezzi, la quale si noti dirimpetto a ciascheduno di essi. Quindi avremo che il pezzo BAD sia di $488 \frac{1}{2}$; il pezzo DAE di 459, il pezzo EAF di 401, ed il pezzo FAB di $596 \frac{1}{2}$. Queste quattro quantità si sommino, ed avremo per la totale quadratura 2025, la quale va divisa in undeci porzioni, delle quali A sia di 100, B di 120, C di 130, D di $268 \frac{1}{2}$, E di 120, F di 109, G di 280, H di 290, I di 200, K di 300 ed L di $107 \frac{1}{2}$, e che una delle linee de' quadranti AB sia il primo lato di appoggio.

Fig. 100

Per dare ad A la porzione 100, perchè il lato di appoggio è AB, e quello d'incidenza non potendo essere BC, ma sarà CI, il quale convergendo col lato di appoggio al di dentro del trapezio, così noi stenderemo IC sino ad H, e ne nasce il triangolo CHB, che si deve calcolare, e ci ritroveremo nel caso dell'apparecchio interno triangolare. Per calcolare questo triangolo dell'apparecchio interno, egli fa uopo, che si calcoli prima la base HB, per indi conoscere il resto HA. Per sapere questa base, fingeremo, che dal punto I si tiri una perpendicolare sopra HB, esopra di questa perpendicolare un'altra linea dal punto C, ed avremo un triangolo rettangolo, il cui cateto più lungo vien distinto in due porzioni, delle quali la più lunga che comincia da I, sarà 19, il resto 4; di più la linea tirata da C sarà 3, giacchè siccome il punto I è distante dalla linea de' quadranti AD per un intervallo 23, e la linea della riduzione sino a C essendo 19, così il suo prolungamento sarà 4. Inoltre essendo la linea de' quadranti AB lunga 28, così la perpendicolare tirata da I taglierà il lato HB in due porzioni, delle quali quella verso B sarà 2, e l'altra verso

Il si deve calcolare, dicendo così. Come la prima parte 19 della perpendicolare tirata da I sino dirimpetto a C, sta alla linea 3 tirata sino a C, così tutta la perpendicolare 25 tirata sino ad HB, alla porzione sino ad H, che si trova $3 \frac{1}{3}$, e perchè il resto sino a B è di 2, così sarà tutta la base HB di $5 \frac{1}{3}$. Ritrovata la base, la sua altezza si avrà dalle linee della riduzione, che sarà 4, e quindi moltiplicata la base $5 \frac{1}{3}$ per 2 metà dell'altezza il prodotto $11 \frac{1}{3}$ sarà la quadratura di tutto l'apparecchio interno triangolare HCB. Da questo conosciamo finalmente, che essendo tutto AB di 28, dal quale si è tolto HB, il resto HA sarà di $22 \frac{1}{3}$.

Ritrovato così l'apparecchio interno triangolare $11 \frac{1}{3}$, questo lo toglieremo dalla parte di A di 100, ed avremo il residuo $80 \frac{1}{3}$, che dovremo tagliare dal primo pezzo, e sarà AH il lato di appoggio, ed HI quello d'incidenza. Diviso adunque $88 \frac{1}{3}$ per $11 \frac{1}{3}$, metà di AH, il quoziente $7 \frac{16}{33}$ darà la lunghezza dell'alzata interna HK, la parallela KO e la linea AO sarà la divisoria per la parte di A, che viene compresa da tutto ABCO.

Per dare a B la porzione 120, perchè ci dobbiamo servire del medesimo lato di appoggio AB, e quello d'incidenza non essendo BC, ma CI, così sarà mestieri di servirci del medesimo apparecchio interno triangolare. Quindi escludendo l'apparecchio $11 \frac{1}{3}$, uniremo soltanto la residua porzione di A di $88 \frac{1}{3}$ colla porzione di B di 120, e la di loro somma $208 \frac{1}{3}$ si divida per $11 \frac{1}{3}$, metà del lato di appoggio, residuo AH, ed il quoziente $18 \frac{11}{33}$ darà l'alzata HL, la parallela LP, e la linea AP sarà la divisoria di B, compresa da OAP.

Per dare a C la parte 130, se ci vogliamo servire di AB per lato di appoggio, quello della incidenza non potrà essere BC, e non CI, ma sarà IG, e perciò noi ci serviremo per lato di appoggio di AD, facendo il taglio alla rovescia. Poichè dunque il pezzo BAD contiene $488 \frac{1}{3}$, e dal quale si è tolta la parte di A, e quella di B, così ci resta $268 \frac{1}{3}$. Ora essendo la parte di C di 130, così sottraendo il minore dal maggiore, il residuo $138 \frac{1}{3}$ sarà quello, che noi taglieremo alla rovescia, servendoci di AD per lato di appoggio, e di GI per quello d'incidenza. E poichè questi due lati non sono uniti ad angolo, ma convergono al di dentro del trapezio, così noi stenderemo IG per GR, e ne nasce il triangolo GRD, che si deve calcolare, e che sarà l'ap-

apparecchio interno triangolare. Per calcolare in primo luogo la sua base RD, fingeremo, che dal punto I si tiri la perpendicolare sopra RD, e poi dal punto G una perpendicolare sopra la prima, ed in questa maniera avremo un triangolo rettangolo, il cui cateto più lungo sarà diviso in due porzioni, delle quali la più lunga, che comincia da I, sarà 18, il resto 8, e tutta sarà 26; di più la linea tirata da G sarà 7, come appare dalla riduzione. Inoltre essendo la linea de' quadranti AD lunga 25, così la perpendicolare tirata da I taglierà il lato RD in due porzioni, delle quali quella verso D sarà 2, e l'altra verso R si deve calcolare, dicendo così. Come la prima parte 18 della perpendicolare tirata da I sta alla linea 7 tirata sino a G, così tutta la perpendicolare 26 alla porzione sino ad R, che si trova $10\frac{1}{2}$, e perchè il resto sino a D è di 2, così sarà tutta la base RD di $12\frac{1}{2}$. Ritrovata la base del triangolo GRD, la sua altezza sarà 8, come appare dalle linee di riduzione, e quindi moltiplicata la base $12\frac{1}{2}$ per 4, metà dell'altezza, il prodotto $48\frac{1}{2}$ sarà la quadratura di tutto l'apparecchio interno triangolare. Da questo adunque conosceremo, che il resto RA sarà $12\frac{1}{2}$; poichè tutta la linea AD è di 25.

Ritrovato l'apparecchio interno triangolare $48\frac{1}{2}$, il medesimo lo toglieremo dalla quantità $138\frac{1}{2}$, che dobbiamo tagliare alla rovescia, e ci resta $90\frac{1}{4}$, che taglieremo, servendoci di AR per lato di appoggio, e di RI per lato d'incidenza. Diviso dunque $90\frac{1}{4}$ per $6\frac{1}{2}$, metà di AR, il quoziente $13\frac{1}{4}$ darà l'alzata interna RS, la parallela SP, e la linea AP sarà la divisoria per C, la cui parte è contenuta da PAP, e ci rimane di tutto il pezzo BAD, il residuo PAD di $138\frac{1}{2}$, che entra nella seguente porzione, che taglieremo dall'altro pezzo.

Per dare a D la porzione $268\frac{1}{2}$, poichè noi abbiamo $138\frac{1}{2}$ per residuo nel primo pezzo, così dobbiamo prendere altri 130 nel pezzo seguente. E poichè il lato di appoggio essendo AD, quello d'incidenza non potendo essere DH, ma sarà HL, e comechè sono convergenti, noi li uniremo nel punto Z, ed avremo il triangolo DHZ, che bisogna calcolare per l'apparecchio straniero angolare. Supponiamo già calcolato tutto questo, da cui conosceremo il lato, o sia la base DZ di $5\frac{1}{2}$, e tutta la quadratura anchè $5\frac{1}{2}$. Uniremo dunque questo apparecchio straniero angolare col di più 130 della porzione di D, e la somma $135\frac{1}{2}$ si divida

★

per $15 \frac{1}{2}$, metà di tutto AZ, ed il quoziente $8 \frac{1}{6}$ darà l'alzata esterna KF, la parallela FG, e la linea AG sarà la divisoria per D, contenuta da tutto GAP.

Per dare ad E la porzione 120, essendo AD il lato di appoggio, e non potendo essere HL quello d'incidenza, ma sarà LK, così essendo questi convergenti al di dentro, noi stenderemo KL per LC, e ne nasce il pezzo LHDC, che si deve calcolare, ed avremo a servire in questo caso dell'apparecchio interno multilatero. Per calcolarlo, fingeremo, che dal punto K si tiri una perpendicolare sopra CD, la quale verrà incontrata dalla linea tirata dal punto L di 2, indi entrando nel pezzo dell'apparecchio, interseca la prima linea di riduzione, lasciando la parte verso H di 8, e l'altra parte sino al lato LC si deve calcolare; finalmente intersoca CD in due parti, rimanendo la porzione verso D di 5, e l'altra sino a C si deve calcolare. Avremo dunque un triangolo rettangolo, la cui ipotenusa sarà KC, ed il cateto più lungo verrà diviso in tre parti, delle quali la prima, che comincia dal punto K sino dirimpetto ad L sarà di 18, l'altra, da questo punto sino alla prima linea di riduzione, sarà 8, e la terza da questo punto sino a CD sarà 2, e tutto il cateto sarà lungo 28.

Per sapere la prima linea di riduzione, che entra nell'apparecchio, si dica così. Come la prima porzione 18 della perpendicolare tirata dal punto K sta a 2, linea tirata sino ad L, così le prime due porzioni della medesima perpendicolare tirata alla prima linea di riduzione, che fanno 26, alla porzione sino alla ipotenusa, che si trova $2 \frac{1}{2}$, e perchè il resto sino ad H è di 8, così sarà tutta questa linea $10 \frac{2}{3}$; e perchè questa linea calcolata è una base di triangolo, la cui altezza è 8, che si conosce dalle altre linee di riduzione, perciò moltiplicando questa base per la metà dell'altezza, il prodotto $43 \frac{1}{3}$ sarà la quadratura di questo primo pezzo triangolare dell'apparecchio interno. Inoltre per calcolare CD si dica. Come la prima porzione 18 della perpendicolare tirata dal punto K sta a 2, linea tirata sino ad L, così tutta la perpendicolare 28 alla porzione sino a C, che si trova $3 \frac{1}{3}$, e perchè il resto sino a D è di 5, così sarà tutto CD di $8 \frac{1}{3}$. Avremo dunque, in questo secondo pezzo dell'apparecchio, un capotagliato, i cui due lati opposti paralleli sommati insieme fanno 19, e perchè la sua altezza è 2, conosciuta dalla riduzione, perciò moltiplicata la som-

ma 19 de' due lati paralleli per la metà dell'altezza, il prodotto 19 sarà la quadratura del capotagliato. Ora unendo insieme la quadratura del triangolo $43 \frac{1}{2}$ colla quadratura del capotagliato 19, la somma $62 \frac{1}{2}$ sarà la quadratura di tutto l'apparecchio interno multilatero LHDC. Conoscere-
mo da questo, che essendo CD di $8 \frac{1}{2}$, il resto CA deve essere $16 \frac{1}{2}$, essendo tutto AD di 25.

Ritrovato così l'apparecchio interno, per tagliare la porzione di E di 120, noi uniremo questa porzione 120, ed il residuo di D di 130 espresso da GAD, e dalla di loro somma 250 ne toglieremo l'apparecchio $62 \frac{1}{2}$, e ci rimane il residuo $187 \frac{1}{2}$, che noi taglieremo, servendoci di AC per lato di appoggio, e di CK per lato d'incidenza. Diviso adunque $187 \frac{1}{2}$ per $8 \frac{1}{2}$, metà di AC, il quoziente $22 \frac{1}{2}$ darà l'alzata interna CY, la parallela YV, e la linea AV sarà la divisoria per E, la cui parte è contenuta da VAG.

Per dare ad F la parte 109, si osservi, che servendoci di AD per lato di appoggio, quello d'incidenza non sarà DH, non HL, non LK, ma deve essere KM; per cui lasceremo questo lato di appoggio, e ci serviremo in sua vece della linea de' quadranti AE, e faremo il taglio alla rovescia. E poichè il pezzo EAD è di 459, dal quale si è tolta la porzione residua di D, e la parte di E, così ci è rimasto il residuo 209, dal quale tolta via la parte di F di 109, ci resta l'ultimo residuo 100, che sarà quello, che taglieremo, servendoci di AE per lato di appoggio. E perchè il lato d'incidenza non può essere EM, ma deve essere MK, così essendo questi convergenti al di dentro del trapezio, stenderemo KM per MT, e ne nasce il triangolo TME, che si deve calcolare, e ci serviremo dell'apparecchio interno triangolare. Per calcolarlo, fingeremo, che dal punto K si tiri una perpendicolare sino all'estremo E, essendo la distanza di K dalla linea AD uguale alla EA, ed avremo il triangolo rettangolo KET, di cui cerchiamo ET. Per saperla, dal punto M si tiri una retta a KE, la quale sarà 12, e questa dividerà il cateto, o sia perpendicolare KE in due porzioni, delle quali la prima parte, che comincia da K sarà 14, l'altra, che finisce in E, sarà 6. Ora si dica. Come la prima parte 14, che comincia da K sta a 12, linea tirata sino ad M, così tutta KE di 20 a tutta ET, che si trova 17 $\frac{1}{2}$. Conosciuta la base, ed essendo l'altezza 6, moltiplicheremo questa base per la metà dell'altezza, ed il

prodotto $51 \frac{1}{2}$ sarà la quadratura di tutto l'apparecchio interno triangolare EMT. Conosciamo da questo, che essendosi ritrovato ET di $17 \frac{1}{2}$, sarà il resto TA di $10 \frac{1}{2}$, poichè tutto AE è di 28.

Questo apparecchio interno triangolare $51 \frac{1}{2}$ si sottragga da 100, che dobbiamo tagliare, ed avremo il residuo $48 \frac{1}{2}$, che noi taglieremo, servendoci di AT per lato di appoggio, e di TK per lato d'incidenza. Diviso dunque $48 \frac{1}{2}$ per $5 \frac{1}{2}$ metà di AT, il quoziente $8 \frac{1}{11}$ darà l'altezza interna TR, la parallela RB, e la linea AB sarà la divisoria per F, contenuta da BAV, rimanendoci BAE di 100, che entra a far parte della porzione seguente.

Per dare a G la porzione 280, noi ne abbiamo 100 nel residuo EAB, per cui il di più 180 lo prenderemo nel pezzo seguente. E poichè servendoci di AE per lato di appoggio, quello d'incidenza non può essere EN, ma sarà NO, ed essendo i medesimi convergenti, gli uniremo in X, ed avremo il triangolo ENX, che bisogna calcolare per l'apparecchio straniero angolare. Supponiamo calcolato il medesimo, dal quale conosceremo, che la base EX sia 14, e la sua quadratura 35. Unendo adunque l'apparecchio straniero 35 colla porzione 180, avremo la somma 215, la quale divisa per 21, metà di tutto AX, il quoziente $10 \frac{1}{2}$ darà l'altezza YZ, la parallela ZS, e la linea AS sarà la divisoria per G, contenuta da SAB.

Per dare ad H la porzione 290, se ci serviremo di AE per lato di appoggio, quello d'incidenza non sarà EN, non NO, non OP; ma sarà PE, per cui ci serviremo di AF per lato di appoggio, e faremo il taglio alla rovescia. Poichè il pezzo FAE è di 481, e dal quale si è tolto 180 per lo doppio di G, così ci resta 301, dal quale togliendo 290 per la parte di H, così l'ultimo residuo 11 sarà quello, che taglieremo alla rovescia. Diviso quindi 11 per $11 \frac{1}{2}$ metà di AF, il quoziente $\frac{2}{3}$ darà l'altezza FM, la parallela MS, e la linea AS sarà la divisoria per H compresa da SAS, e ci rimane il residuo SAF di 11, che entra a far parte della porzione seguente.

Per dare ad I la parte di 200, noi ne abbiamo 11 nel residuo antecedente, per cui dobbiamo tagliarne 189 nel pezzo, che segue. E perchè servendoci di AF per lato di appoggio, quello d'incidenza non sarà FQ, non QR, ma RS, e perchè questo è convergente col primo, così li uniremo

nel punto L, e ne nasce l'apparecchio straniero moltilatero LFQR, che bisogna calcolare. Supponiamo essersi calcolato questo, da cui conosceremo, che il lato FL, sia $11 \frac{1}{2}$, e tutta la quadratura $38 \frac{1}{2}$. Unendo questa quadratura straniera col di più di I di 189, la somma $227 \frac{1}{2}$ si divida per $17 \frac{1}{2}$, metà di tutto AL, ed il quoziente $13 \frac{1}{2}$ darà l'altezza CZ, la parallela ZV, e la linea AV sarà la divisoria per la parte di I, compresa in SAV.

Per dare a K la porzione 300, se ci serviremo di AF per lato di appoggio, quello d'incidenza non è FQ, non QR, non RS, non ST, ma sarà TV; quindi è, che ci serviremo di AB per lato di appoggio, e faremo il taglio alla rovescia. Poichè il pezzo FAB contiene $596 \frac{1}{2}$, dal quale si è tolto il dippiù di I di 189, ci è rimasto $407 \frac{1}{2}$, e togliendo anche da questo la parte di K di 300, ci rimane l'ultimo residuo $107 \frac{1}{2}$, che taglieremo, servendoci di AB per lato di appoggio, e di TV per quello d'incidenza. E perchè questi due lati sono convergenti, così noi li uniremo nel punto X, e ne nasce il triangolo BVX, che sarà l'apparecchio straniero angolare, che bisogna prima calcolare. Supponiamo già eseguito questo calcolo, per cui conosceremo, che sia la base BX di 24, e tutta la quadratura 72. Uniremo dunque l'apparecchio col residuo da tagliarsi, ed avremo la somma $179 \frac{1}{2}$, la quale divisa per 26, metà di tutto AX, il quoziente $6 \frac{1}{2}$ darà l'altezza ZQ, la parallela QI, e la linea AI sarà la divisoria per K, contenuta da VAI. Finalmente il resto IAB della divisoria sarà la porzione spettante ad L, come chiaramente si vede essere $107 \frac{1}{2}$, che era l'ultima parte.

3. Sia in terzo luogo il trapezio ad angoli rientranti GKMOPD, che debba dividersi in sette porzioni, prenden- Fig. 100
do il punto divisorio A nello spazio. Si faccia al solito la dovuta preparazione con tirare le due linee de' quadranti BC, DE, le quali intersecandosi in A ad angoli retti, dividono tutto il trapezio in quattro pezzi, in ciascheduno de' quali si faccia la necessaria riduzione, acciò si abbia la quadratura particolare di ogni pezzo, la quale si noti dirimpetto a ciascheduno di essi. Avremo dunque il pezzo DAB di $197 \frac{1}{2}$, il pezzo BAE di 251, il pezzo EAC di 277, ed il pezzo CAD di 308. Si sommino queste quattro quantità, ed avremo $1033 \frac{1}{2}$ per totale quadratura, la quale va divisa in sette porzioni, delle quali A sia di 60, B di $150 \frac{1}{2}$, C di 200,

D di 90, E di 100, F di 300, e G di 133, e che una delle linee de' quadranti AD sia il primo lato di appoggio.

Per dare ad A la porzione 60, si osservi, che essendo AD il lato di appoggio, quello d'incidenza non sarà DF, ma sarà FG, e perchè questi due lati convergono al di dentro, perciò stenderemo GF per FH, ed avremo il triangolo FDH per l'apparecchio interno triangolare, che bisogna calcolare. Supponiamo fatto questo calcolo, e conosceremo essere la base DH di $8\frac{9}{11}$, e tutta la sua quadratura $21\frac{1}{11}$, restando HA di $11\frac{1}{11}$. Ora dalla parte di A di 60 tolto via l'apparecchio, ci rimane il residuo $38\frac{1}{11}$, il quale diviso per $5\frac{1}{11}$, metà di AH, il quoziente $6\frac{10}{11}$ darà l'altezza HI, la parallela IK, e la linea AK sarà la divisoria per A, e resta di tutto il primo pezzo l'avanzo KAB di $137\frac{1}{2}$, che serve per l'altra porzione.

Per dare a B la parte 150 $\frac{1}{2}$, poichè ne abbiamo $137\frac{1}{2}$ nel resto del primo pezzo, perciò il di più 13 lo prenderemo dal pezzo seguente, servendoci di AB per lato di appoggio, e di BH per lato d'incidenza. Diviso dunque 13 per 10, metà di AB, il quoziente $1\frac{1}{2}$ darà l'altezza BL, la parallela LM, e la linea AM sarà la divisoria per B, contenuta da KAM.

Per dare a C la porzione 200, se ci serviremo di AB per lato di appoggio, quello d'incidenza non sarà BH, non HI, non IK, ma sarà KE, per cui lasceremo il primo, e ci serviremo di AE per lato di appoggio, facendo il taglio alla rovescia. Quindi il pezzo BAE essendo 251, dal quale si è tolto 13 della porzione di B, ci è rimasto 238, e da questo togliendo anche la porzione di C di 200, ci rimane l'ultimo residuo 38, che taglieremo alla rovescia. Diviso dunque 38 per 8, metà di AE, il quoziente $4\frac{1}{2}$ darà l'alzata EN, la parallela NO, e la linea AO sarà la divisoria per C, la cui porzione è MAO, e ci resta OAE di 38, che entra nella seguente porzione.

Per dare a D la porzione 90, poichè abbiamo il residuo 38 nel pezzo antecedente, così il di più 52 lo prenderemo nel pezzo seguente. E poichè servendoci di AE per lato di appoggio, quello d'incidenza non potendo essere EL, ma deve essere LM, così stenderemo ML per LX, ed avremo il triangolo LXE per l'apparecchio interno triangolare, che bisogna calcolare. Supponiamo eseguito questo calcolo, e sapremo, che XE sia $4\frac{1}{2}$, e la sua quadratura $6\frac{1}{4}$; donde appare, che il resto XA sia $11\frac{1}{4}$. Quindi da 52 tolto via l'app-

parecchio $6 \frac{1}{2}$, il resto $45 \frac{1}{2}$ lo divideremo per $5 \frac{2}{3}$, metà di AX, ed il quoziente $7 \frac{11}{12}$ darà l'alzata XY, la parallela YZ, e la linea AZ sarà la divisoria per D, contenuta da OAZ.

Per dare ad E la parte 100, poichè dobbiamo servirci di AE per lato di appoggio, e non potendo essere quello d'incidenza nè EL, nè LM, ma sarà MN, ed essendo MN parallelo con AE, così noi faremo il taglio in forma di capotagliato. E perchè questi due lati paralleli non sono uniti ad un terzo lato con angoli retti, così noi gli uniremo, facendo così. Dall'estremo più lungo M si tiri la perpendicolare MV, finchè s'incontra col prolungamento di AE in V, ed avremo in questo modo il pezzo straniero MVE, che bisogna calcolare, e che costituisce l'apparecchio straniero quadrangolare. Per calcolarlo, dall'angolo L si tiri LT, e facendo riflessione alle linee della riduzione, sapremo, che essendo il punto M distante dalla linea de' quadranti AC per l'intervallo 20, così perchè AE è di 16, sarà EV di 4, e per l'istessa ragione sarà LT di 7. Conosciamo di più, che VT sarà 3, e TM di 13; per cui si deduce, che il capotagliato ET avrà di quadratura $16 \frac{1}{2}$, moltiplicando i due lati paralleli per la metà dell'altezza; e che il triangolo LTM ne avrà $45 \frac{1}{2}$, e tutto l'apparecchio straniero quadrangolare MVE sarà 62, come è chiaro.

Fatto questo, acciò si proceda alla divisione della parte di E di 100, noi uniremo il dippiù di D di 52, contenuto da EAZ, l'apparecchio straniero 62, e la parte di E di 100, ed avremo la somma 214. Questa somma si divida per 8, metà del lato divisore VM, e dal quoziente $26 \frac{1}{2}$ si sottragga il lato di appoggio intero AV di 20, ed il residuo $6 \frac{1}{2}$ darà la lunghezza contata sopra dell'altro lato MF, e la linea AF sarà la divisoria per E, contenuta da ZAF, e ci rimane di tutto il pezzo EAC la porzione residua FAC di 125, che entra a far parte dell'altra porzione nel pezzo seguente. Si avverta, che questo medesimo taglio può farsi colla divisione alla rovescia, servendoci di AC per lato di appoggio, e dell'apparecchio interno multilatero, che nasce, stendendo MN sopra il lato di appoggio.

Per dare ad F la porzione 300, perchè ne abbiamo 125 nel residuo CAF, perciò gli altri 175 li prenderemo nell'ultimo pezzo. E perchè servendoci di AC per lato di appoggio, quello d'incidenza non sarà CR, non RP, ma sarà

PD, ed essendo PD parallelo con AC, così ci serviremo del taglio in forma di capotagliato. E poichè questi due lati paralleli non sono uniti ad un terzo lato con angoli retti, così noi gli uniremo, facendo a questo modo. Dall'estremo più lungo C si tiri la perpendicolare CQ, finchè s'incontra col prolungamento di DP in Q, ed avremo in conseguenza il pezzo straniero CQP, che bisogna calcolare, e che costituisce l'apparecchio straniero quadrangolare. Per calcolarlo, dall'angolo R si tiri RS, e servendoci delle linee di riduzione, sapremo, che essendo il punto C distante dal punto A per l'intervallo 18, così perchè DP è di 16, sarà PQ di 2, e per l'istessa ragione sarà RS di 4; dippiù sapremo QS di 12, ed SC di 8; donde si conchiude, che il capotagliato QR avrà di quadratura 36, moltiplicando i due lati paralleli per la metà dell'altezza; e che il triangolo RSC ne avrà 16, e quindi tutto l'apparecchio straniero quadrangolare PQC sarà 52, come è chiaro.

Eseguito questo, noi uniremo il dippiù 175 di F, e l'apparecchio 52, ed avremo la somma 227. Questa somma si divida per 10, metà del lato divisore CQ, ed il quoziente sarà $22\frac{7}{10}$, dal quale tolto via il lato intero di appoggio AC di 18, il residuo $4\frac{7}{10}$ darà la lunghezza contata sopra dell'altro lato opposto parallelo QG, e la linea AG sarà la divisoria per F, contenuta da GAF. Finalmente l'ultimo residuo di questa divisione contenuto da GAD di 133 sarà la porzione di G. Si avverta intanto, che quest'ultima porzione poteva stabilirsi col taglio alla rovescia, servendoci di AD per lato di appoggio, e di PD per quello d'incidenza.

Questi esempi stimiamo sufficientissimi per la divisione de' trapezi ad angoli rientranti, essendosi mostrate tutte le pratiche de' casi possibili, che potranno accadere.

24. *Dividere qualsivoglia figura, che abbia un lato curvo.* Siccome la quadratura del cerchio non può aversi mai esatta, così lo stesso accade per la quadratura di ogni altra figura curvilinea. Da questo nasce, che la divisione eseguita nelle figure, che abbiano un lato curvo, non può avere una geometrica esattezza; ma ci contenteremo solamente, che il picciolo errore, che inevitabilmente accader suole, sia di poco momento, e da non farne caso. Intanto egli è da osservarsi, che la curvità di un lato di qualsivoglia figura, potendo presentare al campo della figura o la sua concavità, o la sua convessità, così due casi potrebbe-

ro accadere, o che le divisorie terminassero nella concavità, o nella convessità. Ed acciocchè con un solo esempio si veggia la pratica di questi due casi, noi divideremo una figura, che abbia un lato serpeggiante, nel quale si avrà la concavità, e la convessità, e vedremo il metodo, che occorre per la direzione delle divisorie.

Sia dunque la figura $ABDC$, che abbia un lato BD serpeggiante, e che debba dividersi in cinque porzioni dall'angolo A . Poichè questo angolo è retto, così le linee dei quadranti saranno i lati istessi CA , AB della medesima figura. Si faccia inoltre la riduzione interna necessaria, acciò si possa avere la quadratura totale, che sarà $763 \frac{1}{2}$, la quale sia divisa in cinque porzioni, delle quali sia A di 100, B di 150, C di 156 $\frac{1}{2}$, D di 240, ed E di 117, e che AB debba essere il lato di appoggio.

Per dare ad A la porzione 100, perchè la divisoria non tocchi BG , ma un punto di GE , così stimando noi, senza error sensibile, la curvità EG per una linea retta, la stenderemo per GF , ed avremo l'apparecchio interno triangolare GFB , che bisogna calcolare. Per sapere in primo luogo la base FB , dal punto E si abbassi la perpendicolare, la quale si unisce coll'estremo B , giacchè i punti E , e B sono ad ugual distanza dal lato AC , indi si tiri HI , e dalle linee della riduzione conosceremo EI di 4, IH di 1, IB di 10, e si cerca BF dicendo così. Come EI di 4 sta ad IH di 1, così tutto EB di 14 a BF , che si trova $5 \frac{1}{2}$, rimanendo poi il resto del lato FA di $24 \frac{1}{2}$. Ora essendo la base FB di $5 \frac{1}{2}$, e l'altezza 5, la sua quadratura sarà $8 \frac{1}{2}$, moltiplicando la base per la metà dell'altezza. Questo apparecchio interno $8 \frac{1}{2}$ si sottragga dalla parte 100, ed il residuo $91 \frac{1}{2}$ si divida per $12 \frac{1}{2}$, metà di AF , ed il quoziente $7 \frac{1}{2}$ darà l'alzata interna FK , la parallela KL , e la linea AL sarà la divisoria per A , contenuta da LAB .

Per dare a B la porzione 150, perchè la sua divisoria non tocchi la curvità GB , non GE , ma cade in EM , e stimando questo lato curvo EM , senza error sensibile, come linea retta, la quale è convergente col lato di appoggio al di fuori della figura, così stendendo ambidue, gli uniremo in N , e ne nasce il pezzo $EGBN$, che bisogna calcolare, e sarà questo l'apparecchio straniero angolare multilatero. Questo pezzo straniero viene formato dal triangolo EBN , e dal pezzo mistilineo EGB . Per calcolar questo pezzo mistilineo

si faccia così. Abbiamo il parallelogrammo rettangolo EQ, la cui quadratura è 112, che abbraccia i tre capotagliati, ed il pezzo mistilineo straniero. Ora sommando la quadratura de' tre capotagliati, ritroveremo essere $97 \frac{1}{2}$; quindi sottraendo questa quadratura $97 \frac{1}{2}$ da 112 totale quadratura del parallelogrammo EQ, il residuo $14 \frac{1}{2}$ sarà la quadratura dello straniero mistilineo. Si deve ora calcolare il triangolo EBN, supponendo il lato curvo EMD come un prolungamento rettilineo di NE. Per ritrovare la base BN si dica così. Come DR di 8 sta ad RM di 4, così tutto DQ di 30 a tutto QN, che si trova 15. E poichè QB è di 8, sarà BN di 7. Saputa la base, si conosce l'altezza essere 14 dalle linee di riduzione; per cui moltiplicando la base per la metà dell'altezza, il prodotto 49 sarà la quadratura del triangolo. Unendo dunque la quadratura del triangolo colla quadratura dello straniero mistilineo, avremo la somma $63 \frac{1}{2}$ per l'apparecchio straniero EGBN.

Per tagliare dunque la parte di B di 150, uniremo insieme questa parte, la parte di A, e la quadratura dell'apparecchio straniero, ed avremo la somma $313 \frac{1}{2}$, la quale divisa per $17 \frac{1}{2}$, metà di tutto AN, il quoziente, che nasce $17 \frac{2}{3}$ darà l'alzata BO, la parallela OP, e la linea AP sarà la divisoria per B.

Per dare a C la porzione $156 \frac{1}{2}$, poichè la sua divisoria tocca un punto di MD, e supponendo DME, senza error sensibile, come una linea retta, così non essendo la medesima unita al lato di appoggio, noi stenderemo ambidue in N, e ci serviremo del medesimo apparecchio straniero multilatero. Quindi unendo insieme la parte di A, di B, di C, e l'apparecchio straniero, avremo la somma 470, la quale divisa per $17 \frac{1}{2}$, metà di tutto AN, il quoziente $26 \frac{1}{2}$ darà l'alzata BS, la parallela ST, e la linea AT sarà la divisoria per C.

Per dare a D la porzione 240, poichè servendoci del lato di appoggio AB, quello d'incidenza sarà CD, ed essendo questi due lati fra di loro paralleli, così noi taglieremo questa porzione in forma di capotagliato, facendo così. Dall'estremo più lungo B si tiri la perpendicolare BV uguale, e parallela ad AC, ed indi si unisca con CD prolungata per DV. Fatto questo, avremo due pezzi stranieri EVD, ed EBG, che bisogna calcolarli, ed avremo così a servirci dell'apparecchio straniero quadrangolare. La quadratura dello

straniero EBG si ha dall' antecedente operazione, ed è di $14 \frac{1}{2}$; solamente bisogna calcolare EVD nella seguente maniera. Abbiamo il parallelogrammo rettangolo DE; la cui quadratura è di 128, che abbraccia i tre pezzi interiori, e lo straniero. Ora sommando i tre pezzi interiori, ritroveremo essere 66; per cui sottraendo questa somma da 128, totale quadratura del parallelogrammo DE, il residuo 62 sarà lo straniero mistilineo. Unendo dunque i due stranieri, avremo $76 \frac{1}{2}$ per quadratura di tutto l'apparecchio straniero quadrangolare DVEB.

Per tagliare ora la parte di D di 240, uniremo insieme questa parte, quella di A, di B, di C, e l'apparecchio straniero quadrangolare, ed avremo la somma 723, la quale divisa per 15, metà del lato divisore BV, avremo per quoziente $48 \frac{1}{3}$, dal quale tolto via il lato di appoggio AB, il residuo $20 \frac{1}{3}$ darà l'altro lato VZ, e tirata AZ, la medesima sarà la divisoria per D, contenuta da ZAT. Il resto della figura, espresso per ZAC di 117 sarà l'ultima porzione di E, come è facile a capirsi.

Tutti i problemi della divisione fin qui eseguiti hanno supposto sempre, che nel punto divisorio cominciassero tutte le porzioni, nelle quali una figura sia divisa. Occorrendo intanto che ciascheduna di queste porzioni debba possedersi da un diverso padrone, così sarà necessario di stabilire in questo punto divisorio uno sfogo libero, acciò l'uso di una porzione non arrecasse fastidio all'altra. Questo è per appunto il problema seguente.

25. *Dato un ricovero, costituirvi d'intorno uno spazio libero, e calcolarne la quadratura di tutto, e l'ambito rettilineo.* Acciocchè si possa intendere bene la natura di questo problema, egli è necessario di avvertire alle cose seguenti. Avendo finora eseguita la divisione de' campi, questa si è fatta sempre da un punto, in modo che tutte le porzioni, nelle quali vien diviso un campo, si uniscano tutte nel medesimo punto. Dovendo servire ciascheduna di queste porzioni a persone diverse, non ci è in questo punto divisorio lo sfogo comune, per cui ognuno potesse entrare nella sua porzione senza incomodare il suo vicino. Questa è la ragione, per cui noi stabiliamo il presente problema, il quale va inteso nella maniera seguente. Supponiamo, che tre padroni di armenti si prendano un territorio da pascolo, e che co' di loro rispettivi armenti sieno uniti nel mezzo del ter-

Fig. 103 ritorio. Si stabilisce in un luogo del medesimo il ricovero ABDC, distinto in tre luoghi, in ognuno de' quali entra al riposo l'armento stabilito. Questo ricovero si dice *Ascio* dai Pugliesi, che è lo stesso di *Agio*, dinotante un comodo ricovero.

Fatto questo, se il territorio d' intorno venga diviso, anche in questo caso non sarà facile a ciascheduno armento, uscendo dall'ascio di entrare a pascolare la sua porzione, senza calpestare la porzione altrui. Quindi si stabilisce intorno all'ascio uno spazio libero in giro comune a tutti, acciocchè uscendo dall'ascio, abbia libero il cammino d' intorno, finchè possa entrare nella sua porzione senza offendere le porzioni altrui. Ora questo spazio libero e comune si stabilisce colla regola seguente. Il lato AB dell' ascio si distenda in diretto da amendue le parti in K, ed in I, in maniera che BK, AI sieno sempre di 10 passi ciascheduna. Lo stesso si faccia per CD co' prolungamenti DM, CL, anche ciascheduno di 10 passi. Inoltre gli altri due lati dell'ascio AC, BD si allungino della stessa quantità per BF, DH, e per AE, CG, e di poi tutti gli estremi si chiudano colla retta EFKMHGLI; per cui lo spazio intero compreso fra questo ambito fatto da otto linee rette, e l'ascio, costituisce lo spazio libero, e comune a tutti, e che col nome di *Campana* viene chiamato.

Ben intesa adunque la posizione dell' ascio, e la costruzione della campana, si cerca di calcolare la quadratura di tutta la rappresentazione, e la lunghezza in giro dell' ambito rettilineo della medesima. Per calcolare la quadratura del tutto, egli è facilissimo. Imperciocchè essendo AB di 30, ed AC di 20, e moltiplicando l'un per l'altro, avremo la quadratura 600 del solo ascio ABDC. Dippiù essendo EF di 30, ed EA di 10, avremo per EB la quantità 300, per GH anche 300; sarà poi AL di 200, e BM anche 200; sarà di più il triangolo FBK di 50, MDH di 50, GCL di 50, ed IAE di 50. Unite tutte queste quantità avremo la somma di 1200, che costituisce la quadratura della campana. Ora essendo 600 la quadratura dell' ascio, e 1200 la quadratura della campana, o sia dello spazio in giro, la di loro somma 1800 sarà la quadratura di tutto lo sfogo, e della intera rappresentazione.

Per conoscere poi la lunghezza dell' ambito rettilineo, o sia perimetro dell' intera campana, egli è facilissimo. Si numerano prima le lunghezze de' lati de' quattro parallelogram-

mi, che sono EF di 30, KM di 20, HG di 30, LI di 20; e che sommati fanno 100; indi de' quattro triangoli rettangoli laterali, conoscendosi i cateti, si calcoleranno le quattro ipotenuse, delle quali ciascheduna sarà 14, e tutte quattro fanno 56, quale numero unito a 100, avremo 156 per tutto l'ambito. Ora per la esecuzione del presente problema, avremo 1800 per quadratura della intera campana, e 156 per la lunghezza in giro del suo ambito rettilineo, o sia del suo perimetro, e così avremo formato lo sfogo libero, e comune a tutte le porzioni.

26. *Dividendo qualsivoglia figura, stabilire nell'ambito della campana l'apertura proporzionata alle parti divise.* Sia un parallelogrammo rettangolo CDIH da dividersi dal punto A, nel quale bisogna lasciare l'ascio, e la campana. Primieramente si tirino le due linee de' quadranti BG, EF, le quali dividono la figura in quattro pezzi, e si misurino i lati convenienti per avere la quadratura di ciascheduno di essi, e la totale quadratura che si trova in questo caso è 31816, la quale si noti da parte. Fatta questa prima operazione, si deve in seguito stabilire l'ascio, e la campana. L'ascio posto in A abbia 40 di lunghezza, e 20 di larghezza, e sarà perciò 800 di quadratura. Inoltre si costruisca intorno all'ascio lo spazio libero, col menare da ciaschedun angolo dell'ascio le distanze di 10 passi, e con chiudere il tutto collesolite otto linee rette, ed avremo per lo spazio libero in giro 1400 di quadratura. Unendo dunque queste due quadrature, la somma 2200 sarà la quadratura della intera campana, ed avrà 176 per l'ambito in giro.

Fig. 104

La quadratura 2200 dell'intera campana si sottragga dalla quadratura totale 31816 di tutto il dato parallelogrammo, ed il residuo 29616 sarà la quadratura netta, che si dovrà dividere in sette porzioni, delle quali A sia di 3050, B di 4660, C di 4506, D di 2400, E di 6000, F di 5000, e G di 4000, principiando la divisione dal punto O, e che sia OB il primo lato di appoggio.

Prima d'incominciare la divisione, egli è mestieri di ben capire l'uso dell'ambito della campana. Poichè tutto l'ambito è 176, così si deve distribuire questo ambito nelle sette porzioni, che entrano nella divisione, e questa tale distribuzione dovrà farsi proporzionata al quantitativo di ciascheduna. Per questo calcolo distributorio noi ci serviremo della semplice regola di società, e supponiamo già eseguito il tutto,

per cui conosceremo, che incominciando a contare da O, spetta alla porzione di A l'apertura lunga OK di 18, a B l'apertura KLN di 27, a C l'apertura NP di 26, a D l'apertura PQ di 15, ad E l'apertura QXY di 36, ad F l'apertura YGZ di 29, ed a G l'apertura ZNO di 25, le quali sommate insieme fanno tutto l'ambito 176. Ritrovate così queste distanze in giro, si segnano ne' punti O, K, N, P, Q, Y, Z, quali punti vengono chiamati *Capomattone*, da' quali dovrà tirarsi la divisoria per ogni porzione nel modo seguente.

Per dare ad A la parte 3050, poichè questa quantità ha per sua rata dell' ambito la lunghezza OK di 18, così si tiri la parallela KP, ed essendo KP di 62, sarà tutto il parallelogrammo OP di 1116, per cui il di più 1934 della porzione di A lo prenderemo dall'altra parte, servendoci di KP per lato di appoggio, e di PD per lato d'incidenza. Diviso dunque 1934 per 51, metà di KP, il quoziente 62 $\frac{1}{3}$ darà PQ, e la linea KQ sarà la divisoria per la porzione di A. Fatto questo, essendosi levato 3050 dal primo pezzo, ci è rimasto il residuo 3612, il quale serve per l'altra porzione.

Per dare a B la parte 4660, si osservi, che avendone un residuo 3612 nel primo pezzo, il di più 1043 lo dobbiamo tagliare dal pezzo seguente. E poichè la rata dell' ambito per B ha per lunghezza KLN di 27; ed essendo KL di 16 nel primo pezzo, ci resta LN di 11 in questo altro pezzo. Quindi tirata la parallela NM di 66, avremo il parallelogrammo NF di 726. E poichè B deve avere 4660, così l'ultimo residuo 322 sarà quello, che taglieremo, servendoci di NM per lato di appoggio, e di MI per lato d'incidenza. Diviso dunque 322 per 33 metà di NM, il quoziente 9 $\frac{1}{3}$ darà MO, e la linea NO sarà la divisoria per B.

Per dare a C la porzione 4506, poichè questa ha per rata dell' ambito NP la lunghezza di 26, così si tiri dal suo capomattone la parallela PS di 62, e sarà PX di 17, ed avremo il parallelogrammo XS di 1054. Ora da tutto il pezzo GF, essendosi levato prima LO di 1048, ci rimane 6934, e da questo togliendosi ancora XS di 1054, ci resta nel mezzo SO la quantità 5880, e perchè C deve avere solamente 4506, così l'avanzo 1374 sarà quello, che taglieremo alla rovescia, servendoci di PS per lato di appoggio, e di SI per lato d'incidenza. Diviso dunque 1374 per 31, metà di PS, il quoziente 44 $\frac{1}{3}$ darà ST, e tirata PT, la medesima sarà la divisoria per C, contenuta da PTIO.

Per dare a D la porzione 2400, si osservi, che il capomattone di D essendo in Q distante 15 da P, ed avendo tirata QR di 62, avremo il parallelogrammo RP di 930, e pel triangolo PST avremo 1374, e che uniti insieme fanno 2304. E perchè D deve avere 2400, così il di più 96 lo prenderemo dall'altra parte, e sarà QR il lato di appoggio, ed RH il lato d'incidenza. Diviso dunque 96 per 31, metà di QR, il quoziente $3\frac{1}{31}$ darà RV, e la linea QV sarà la divisoria per D, compresa da QVTP.

Per dare ad E la parte 6000, la sua rata dell'ambito essendo QXY di 36, ed il punto Y il suo capomattone, così dal medesimo si tiri YS di 68, ed essendo SE di 20, avremo il parallelogrammo YE di 1360. Inoltre tutto il pezzo EG essendo 8166, al medesimo uniremo il piccolo parallelogrammo XQRG di 124, ed avremo tutto il pezzo ER di 8290. Da questo togliendone 96 pel triangolo QVR, ci resta 8194, e da questo tolto via YE di 1360, ci rimane il di più nel mezzo 6834. Ora perchè E deve avere 6000, così il di più 834 solamente taglieremo alla rovescia, servendoci di YS per lato di appoggio, e di SH per lato d'incidenza. Diviso adunque 834 per 34, metà di YS, il quoziente $24\frac{2}{17}$ darà SZ, e la linea YZ sarà la divisoria per E, contenuta da YZVQ.

Per dare ad F la porzione 5000, poichè la rata dell'ambito è di 29, ed il suo capomattone cade in Z, perciò si tiri ZT, di cui si deve colcolare la lunghezza. Per calcolarla si dica per primo. Se l'ipotenusa GN cala un cateto 10, la porzione GZ di 9 calerà l'altezza $6\frac{1}{2}$, che corrisponde ad ET. Calcolata l'altezza, si calcoli l'avanzo di lunghezza di TZ sopra EG dicendo così. Se il lato che si alza da G di 10, si alza sino ad N anche di 10, la porzione compresa da G sino alla linea TZ, che è di $6\frac{1}{2}$, allargherà sino a Z anche $6\frac{1}{2}$, e perchè EG è di 68, sarà TZ di $74\frac{1}{2}$. Ritrovata così la lunghezza e l'altezza del capotagliato GZTE, avremo per la sua quadratura 458. Quindi unendo insieme questo capotagliato 458, il parallelogrammo EY di 1360, ed il triangolo YSZ di 834, avremo la somma 2652. Ora perchè F deve avere 5000, così il di più 2348 lo taglieremo dall'ultimo pezzo EB, e sarà ZT il lato di appoggio, e TC il lato d'incidenza. Diviso adunque 2348 per $37\frac{1}{17}$, metà di ZT, il quoziente $63\frac{13}{17}$ darà TI, e la linea ZL sarà la divisoria per F, contenuta da LZZY. Finalmente il resto CLZOB di 4000 sarà

L'ultima porzione, che spetta a G, che ha di rata dell'ambito ZNO di 25, come è chiaro a capirsi.

Tutte le regole esposte per la divisione ordinaria sono quelle, il cui uso è perpetuo quante volte porta l'occasione di eseguire questi problemi. Intanto egli è a considerarsi, che questi tagli già fatti in tanti modi diversi si sono eseguiti con tutta la facilità nel disegno, in dove si aveva sotto l'occhio tutta l'unione delle linee, che dovevano servire alla operazione; ma dovendosi poi porre in pratica nella campagna, allora queste linee scompaiono, e l'operatore potrebbe ritrovarsi in un sensibile imbarazzo. Quindi nasce la necessità di manifestare que' mezzi, e quelle regole, colle quali noi possiamo effettivamente eseguire ogni divisione, ed ogni taglio da praticarsi in campagna, e nel misurato e configurato territorio. Si fatte regole, che esporremo, egli è a sapersi, che si debbano anticipatamente fare anche nel disegno, e poi l'effettiva esecuzione, secondo ritroveremo ne' di loro risultati, cogli strumenti agrimensori la praticheremo nella campagna.

27. *Nel tirare le divisorie, determinare da lontano il punto della incidenza senza camminarlo.* Acciocchè s'intenda perfettamente la natura di questo problema, egli è necessario di rammentare, che la divisione accadendo in qualsivoglia figura, le porzioni che si tagliano, vengono staccate tutte a triangoli rettangoli, de' quali il lato di appoggio è sempre un cateto, e l'alzata è l'altro cateto, che si cammina, e che è tanto lungo per quanto esprime il quoziente della divisione. Affilando dunque l'estremità di questo secondo cateto coll'estremo del primo cateto, in cui risiede il punto divisorio, la linea tirata tra questi due punti sarà la divisoria. Per tirare adunque la divisoria ben si vede, che il secondo cateto bisogna camminarlo indispensabilmente colla misura; e perchè per gl'intoppi del suolo, e per la sua lontananza dal punto divisorio, recherebbe della fatica, perciò si è ritrovato un altro metodo, come tirare la divisoria senza camminare questo lato secondo perpendicolare, bastando solamente di averlo calcolato; ed il tutto si eseguisce nel modo seguente.

Fig. 105 Rappresenti AB un lato di appoggio, come primo cateto di un triangolo rettangolo, che debba avere di quadratura 600, e sia AB di 40, ed A il punto divisorio. La quadratura 600 si divida per 20, metà di AB, ed il quoziente 30 darà la

lunghezza dell'altro lato, o sia cateto BC, dal cui estremo C tirata CA, la medesima sarà la divisoria per 600 di quadratura. Ora in questa operazione ben si vede, che per determinare l'estremo C, sarà uopo di effettivamente camminare, e misurare la lunghezza BC di 30. Intanto per risparmiarci questa fatica, noi faremo così. Dal punto divisorio A si cammini 10 passi, o quanto si voglia sino in D, e quivi si faccia una regola semplice del tre, dicendo. Se tutto AB di 40 dia per altezza BC di 30, la porzione camminata AD di 10, quanto alzerà di perpendicolo. Fatto il calcolo, si trova l'altezza $7\frac{1}{2}$; per cui posto in D lo squadro, si collinei una visuale DE, e camminato $7\frac{1}{2}$, il punto E sarà l'estremo. Affilando dunque dal punto A per E la linea, che per questi due punti si tira, andrà a toccare l'estremo C del lato BC. Questa pratica, che altrove abbiamo chiamata *Regola del Tre*, ci sarà di guida per tutte le divisioni, che noi eseguiremo nella campagna, avendo la prima determinata nel disegno.

28. *Dividere un Territorio con far uso della regola del Tre.* Sia il territorio FGH da dividersi in quattro porzioni dal punto A. Si ponga in A lo squadro, e si tirino, e si misurino le linee visuali de' quadranti BC, DE, che s'intersecano ad angoli retti in A, o sia nel centro dello squadro. Fatto questo, poichè il territorio è un parallelogrammo rettangolo, verrà diviso in quattro altri minori parallelogrammi, ed avremo di ciascheduno di essi la quadratura. Sarà dunque AG di 1182, AI di 925, AH di 525, ed AF di 672, i quali sommati insieme fanno 3306, che dinota la totale quadratura dell'intero parallelogrammo. Questa quadratura va divisa in quattro porzioni in maniera che sia A di 800, B di 960, C di 647, e D di 899. Queste porzioni che poi si tagliano nel campo della figura, sono chiamate da' Pratici col nome *Aniti*. Finalmente la prima divisoria sia AB, la quale si dice *Fitta morta*; giacchè dalla medesima principiano le porzioni, e girando intorno al punto divisorio, nella stessa linea vanno a terminare.

Fig. 106

Per dare ad A la sua parte 800, poichè questa quantità supera la metà del primo pezzo AG di 1182; per cui servendoci della fitta morta AB per lato di appoggio, quello d'incidenza non sarà BG, ma sarà GE, perciò la taglieremo a capotagliato nel disegno, facendo così. Si divida 800 per $18\frac{1}{2}$, metà del lato divisore BG, e dal quoziente 43 si sottragga

*

AB di 32, ed il residuo 11 darà la lunghezza GK dell'altro lato parallelo, ed il punto K. Per tirare poi nella campagna la divisoria AK, noi ci serviremo della regola del tre, facendo così. Dal punto A si cammini sopra l'altra linea de' quadranti AE la porzione AN di 10, e giunto in N si dica. Come AE di 37 sta ad EK di 21, così la porzione AN di 10, all'altezza NO, che sarà $5\frac{1}{4}$. Si ponga in N lo squadro, ed affilando la visuale NO, si cammini per $5\frac{1}{4}$ sino ad O; indi collineando i due punti A, ed O, la linea tirata per essi andrà a toccare il punto K, e sarà la divisoria per la porzione di A.

Per dare a B la sua parte 960, poichè ne abbiamo 382 nel triangolo AKE, così il resto 578 lo taglieremo dall'altro pezzo anche a capotagliato. Diviso adunque 578 per $12\frac{1}{2}$, metà del lato divisore EI, e dal quoziente 46 sottratto AE di 37, il residuo 9 darà IL, ed il punto L nel disegno. E perchè tutto IC è di 37, così CL sarà 28. Per tirare poi nella campagna la divisoria senza bisogno di camminare colla misura tutto CL, si faccia così. Dal punto A si cammini AP di 10, e nel punto P si ponga lo squadro secondo il solito, e si affili la visuale PQ, ed indi si dica. Tutto AC di 25 sta a tutto CL di 28, come AP di 10 a PQ, che sarà $11\frac{1}{4}$. Si cammini dunque PQ di $11\frac{1}{4}$, ed affilando i due punti A, e Q, la linea tirata per essi toccherà il punto L, e sarà la divisoria per B.

Per dare a C la sua parte 647, perchè ne abbiamo 347 nel triangolo ACL, così il dippiù 300 lo dobbiamo prendere nell'altro pezzo, ed anche a capotagliato. Si divida dunque 300 per $10\frac{1}{2}$, metà del lato divisore CH, e dal quoziente 29 in circa sottratto AC di 25, il resto 4 indica la lunghezza HM, ed il punto M nel disegno; e perchè tutto HD è di 25, così resta MD di 21. Per tirare poi nella campagna la divisoria, dal punto A si cammini sopra AD la porzione AR di 10, ed ivi si ponga lo squadro, del quale una linea de' quadranti collinei AD, e l'altra affili l'altra visuale RS, ed indi si dica. Tutto AD di 21 sta a tutto DM di 21, come la parte AR di 10 alla visuale RS, che sarà anche 10. Quindi collineando i due punti A, ed S, e pe' medesimi tirata la divisoria, questa istessa terminerà nel punto M, dove si voleva. Finalmente il resto della figura 899, contenuto da MFBA sarà la porzione spettante a D, come è manifesto.

29. *Dato il punto d'incidenza per una divisoria sopra di un lato obliqua, ritrovare il punto perpendicolare cor-*

rispondente sul lato di appoggio, e la distanza del medesimo dal punto divisorio, acciò si faccia uso della regola del Tre. Per intendere bene questo problema, egli è necessario di rammentarsi, che ogni qual volta accade una divisione in campagna da un dato punto, noi facciamo uso della regola del tre per dirigere la linea divisoria. Ora questa regola sempre suppone, che il lato della incidenza, sul quale va a terminare la divisoria, sia perpendicolare al lato di appoggio, come abbiamo eseguito nell'antecedente problema; giacchè la regola suppone un triangolo rettangolo, del quale la ipotenusa è la divisoria, un cateto il lato di appoggio, e l'altro cateto il lato della incidenza. Ma per lo più avviene, che il lato d'incidenza non sia perpendicolare al lato di appoggio, ma obliquo, o approssimante, ovvero sfuggente, ed in questo caso, sebbene colle linee straniere noi troviamo il punto della incidenza sulle figure eseguite nel disegno, non potremo poi nella campagna far uso della regola del tre per la direzione della divisoria, mancandoci il cateto perpendicolare della incidenza.

Questa è la ragione, per cui abbiamo bisogno della esecuzione di questo problema, acciò si possano determinare, e conoscere col calcolo anticipatamente due cose, delle quali la prima sarà di ritrovare sul lato di appoggio prolungato, se bisogna, il punto che corrisponda a perpendicolo col punto della incidenza, per avere il primo cateto; e la seconda sarà di ritrovare la distanza da questo punto perpendicolare corrispondente sino al punto divisorio, per avere l'altro cateto, ed in questo modo avendo il triangolo rettangolo, potremo servirci speditamente della indispensabile regola del tre per dirigere le divisorie in qualsiasi caso, che accadesse. Intanto per la esecuzione di queste due pratiche necessarie, esporremo quattro casi generali, ben intesi i quali, si eseguiscano facilmente tutti gli altri di simil guisa.

1. Sia in primo luogo il trapezio ABEFI, del quale la totale quadratura sia 759. Da questa se ne deve staccare una porzione $321 \frac{1}{2}$ dal punto divisorio A, servendoci di AB per lato di appoggio. Poichè in questo caso la divisoria non cade in BE, ma cade nel lato della incidenza EF, così per eseguire il taglio ci serviremo dell'apparecchio straniero angolare EDB, ed eseguendo il tutto secondo altrove abbiamo esposto, avremo per quoziente $15 \frac{1}{2}$ espresso per l'alzata CH; per cui tirata la parallela HG, il punto G sarà il punto della

Fig. 107

incidenza, e la linea AG sarà la divisoria richiesta. Ora per potere dal punto A dirigere questa divisoria, e servirci della regola del tre, sarà necessario in primo luogo di ritrovare col calcolo il punto L sul lato di appoggio, che corrisponda a perpendicolo col punto G della incidenza, per avere il primo cateto GL, che sarà $15 \frac{1}{2}$, comechè uguale all'alzata CH; e poi ritroveremo la distanza LA sul lato di appoggio, per avere l'altro cateto.

Per ritrovare adunque il punto L, bisogna ritrovare la lunghezza HG, facendo così. Tutto EK di 12 sta a tutto KP di 16, come la parte EH di $5 \frac{1}{2}$ alla distanza HG, che si trova $7 \frac{1}{2}$. E poichè HG è uguale a CL sarà anche CL di $7 \frac{1}{2}$. e perchè CB è di 5, resterà BL di $2 \frac{1}{2}$. Ora essendo tutto il lato di appoggio AB di 35, sarà la porzione AL di $32 \frac{1}{2}$. Quindi del triangolo rettangolo ALG essendoci noti i due cateti AL, LG, potremo servirci della regola del tre per dirigere la divisoria AG nel punto G della incidenza.

Fig. 108

2. Sia in secondo luogo il capotagliato ABCH, di cui la quadratura intera sia 600, e dalla quale se ne debba tagliare una porzione 180 dal punto divisorio A, servendoci di AB per lato di appoggio. In questo caso, perchè la divisoria cade nel lato d'incidenza BC, così eseguendo questo taglio, avremo per quoziente 18, espresso dall'alzata BD, e tirata la parallela DE, il punto E sarà il punto d'incidenza, e la linea AE sarà la richiesta divisoria. Ora acciò possiamo dal punto A colla regola del tre dirizzare questa divisoria, sarà uopo di ritrovare col calcolo il punto G, che sta in diretto col prolungamento BG, del lato di appoggio AB, e che questo punto G corrisponda a perpendicolo col punto E della incidenza, per avere il primo cateto EG, che sarà 18, perchè uguale all'altezza BD; e poi ritroveremo la distanza GA sul dato di appoggio, per avere l'altro cateto.

Per ritrovare il punto G bisogna ritrovare la lunghezza DE, facendo così. Tutto BF di 24 sta a tutto FC di 10, come la porzione BD di 18 alla lunghezza DE, che si trova $7 \frac{1}{2}$. Ora essendo AB di 20, sarà tutto il lato AG di $27 \frac{1}{2}$. Quindi del triangolo rettangolo AGE, essendoci noti i due cateti GE, GA, sarà facile di far uso della regola del tre dal punto A, per dirigere la divisoria AE nel punto E della incidenza.

3. Sia in terzo luogo il trapezio ad angoli rientranti ABKD_H, del quale la totale quadratura sia 598. Dal me-

Fig. 109

desimo se ne deve staccare la porzione 220 dal punto divisorio A, servendoci di AB per lato di appoggio. Poichè in questo caso la divisoria non cade in BK, ma tocca il lato KD della incidenza, così per eseguire questo taglio ci serviremo dell'apparecchio interno triangolare KEB, ed eseguendo il tutto secondo le regole dianzi esposte, avremo per quoziente $15 \frac{1}{2}$ espresso per l'alzata EF; per cui tirata la parallela FG, il punto G sarà il punto d'incidenza, e la linea AG sarà la richiesta divisoria. Ora per dirigere dal punto A questa divisoria, e servirci della regola del tre, sarà mestieri in primo luogo di ritrovare col calcolo il punto C sul lato di appoggio prolungato, che corrisponda a perpendicolo col punto G della incidenza, per avere il primo cateto CG, che sarà $15 \frac{1}{2}$, perchè uguale all'altezza EF, e poi troveremo la distanza CA sul lato di appoggio per avere l'altro cateto.

Per ritrovare il punto C, sarà uopo di ritrovare la lunghezza FG dicendo così. La parte EI di 8 sta alla parte IK di 8, come tutto EF di 15; a tutto FG, che si trova anche $15 \frac{1}{2}$; e poichè EB è di 10, sarà BC di $5 \frac{1}{2}$, giacchè FG è uguale ad EC. Ora essendo AB di 32, sarà tutto il lato AC di $37 \frac{1}{2}$. Quindi del triangolo rettangolo ACG, essendoci noti i due cateti CG, CA, sarà facile l'uso della regola del tre per dirigere dal punto A la divisoria AG, che termina nel punto G della incidenza.

4 Sia in quarto luogo il trapezio AGEI, di cui l'intera quadratura sia 592. Dal medesimo se ne debba tagliare dal punto A la porzione 120 in maniera che la divisoria cada nel lato GE della incidenza. Per eseguire questo taglio, noi ci dobbiamo servire inevitabilmente dell'apparecchio straniero laterale ABG, ed eseguendo il tutto secondo le regole esposte in altro luogo, avremo per quoziente $33 \frac{1}{2}$ espresso per l'alzata BD; per cui tirata la parallela DC, il punto C sarà il punto d'incidenza, e la linea AC sarà la divisoria ricercata. Ora per dirigere dal punto A questa divisoria, e servirci della regola del tre, sarà necessario in primo luogo di ritrovare col calcolo il punto H per avere il lato di appoggio AH, il cui estremo H corrisponda a perpendicolo col punto C della incidenza, per avere il primo cateto HC, che sarà $33 \frac{1}{2}$, comechè uguale all'alzata BD, e poi troveremo tutto il lato di appoggio HA per avere l'altro cateto.

Per trovare il punto H, bisogna trovare la lunghezza DC dicendo così. Tutto BF di 40 sta a tutto FE di $12\frac{1}{2}$, come l'altezza BD di $33\frac{1}{2}$ alla lunghezza DC, che si trova $10\frac{1}{2}$, ed essendo DC uguale a BH, sarà anche BH di $10\frac{1}{2}$, ed essendo AB di $9\frac{1}{2}$, sarà tutto AH di $19\frac{1}{2}$. Ora del triangolo rettangolo AHC essendoci noti i due cateti HC, HA, sarà facile in questo caso adattare al punto divisorio A la regola del Tre per dirigere la divisoria AC al punto C della incidenza. E così abbiamo già terminate tutte le regole pratiche della divisione, che si debbono eseguire nella campagna. Intanto non si debbono tacere diverse altre regole della divisione, che si espongono nell'articolo seguente.

§. II.

La Divisione straordinaria.

Quanto finora abbiamo esposto nella divisione ordinaria egli è tutto quello, che stabilisce il fondamento di questa speciosa parte dell'Agrimensura, e ci pone nelle circostanze di eseguire qualunque problema divisorio non solo nel disegno, ma praticamente altresì nella campagna. Esporremo nella *Divisione straordinaria* alcune altre regole, che stabiliscono i tagli in differenti modi, come vedremo ne' problemi seguenti.

1. *Dato un triangolo noto, tagliarne una porzione con una divisoria parallela alla base.* Poichè i triangoli possono essere rettangoli, acutangoli, ed ottusangoli, così tre casi possono accadere nella risoluzione di questo problema. Diciamo intanto un triangolo esserci noto, quando ne sapremo in misure l'altezza, la base, e tutta la quadratura. Intanto egli è d'avvertirsi, che nel primo caso, quando il triangolo sia rettangolo, allora il lato perpendicolare, che cade sopra l'altro, è lo stesso che l'altezza; ma negli acutangoli, che cade dentro, o negli ottusangoli, che cade fuori, egli bisogna prima calcolarla, per indi venire alla risoluzione di questo problema. Supponiamo dunque, che in qualsivoglia di questi tre casi si sappia, o che si sia prima calcolata l'altezza, per indi poi operare come segue.

Fig. 111 1. Sia in primo luogo il triangolo rettangolo ABC, di cui l'altezza AC sia 46, ed il suo quadrato 2116, la base BC di 21, e tutta la quadratura 483. Si cerca, contando dal ver-

tice A, tagliarne una porzione 180, e che la divisoria sia parallela alla base BC. Per conoscere a qual punto di AC cada la divisoria, incominciando a contare da A, si faccia uso della regola seguente. Come la intera quadratura del triangolo 483 sta al quadrato 2116 di tutta l'altezza AC, così la parte 180, che si cerca di tagliare, al quarto proporzionale. Fatto il calcolo, si trova $788 \frac{1}{4}$, o sia all'ingrosso $788 \frac{1}{2}$. Questo numero dinota il quadrato della lunghezza, che da A si deve contare, per cui estratta la radice $28 \frac{1}{2}$ presso a poco, la medesima darà AD, per cui tirando DE parallela alla base BC, avremo la divisoria per AED di 180.

2. Sia in secondo luogo il triangolo acutangolo ABC, di cui l'altezza AD sia 45, ed il suo quadrato 2025, la base BC di 43, e tutta la quadratura $967 \frac{1}{2}$. Si cerca, contando dal vertice A, tagliarne una porzione 315 con una divisoria parallela alla base BC. Per eseguirlo, si deve trovare un punto nella perpendicolare, da cui si tira la divisoria, facendo uso della regola esposta. Come la quadratura del triangolo $967 \frac{1}{2}$ sta al quadrato 2025 di tutta l'altezza AD, così la parte 315, che si vuole tagliare, al quarto proporzionale. Fatto il calcolo, si trova $659 \frac{1}{2}$, il quale dinota il quadrato della lunghezza, che si deve contare da A, per cui estratta la radice $25 \frac{1}{2}$ presso a poco, la medesima darà AE, e poi la divisoria FG parallela alla base.

3. Sia in terzo luogo il triangolo ottusangolo ABC di cui l'altezza AD sia 48, ed il suo quadrato 2304, la base BC di 30, e tutta la quadratura 720. Si cerca, contando dal vertice A, tagliarne una porzione 200, e che la divisoria resti parallela alla base BC. Per conoscere a qual punto di AD cada la divisoria, contando da A, si faccia uso della regola esposta. Come la quadratura del triangolo 720 sta al quadrato della sua altezza AD di 2304, così la parte 200, che si vuol tagliare, al quarto proporzionale. Fatto il calcolo, si trova 640, il quale rappresenta il quadrato della lunghezza, che si deve contare da A; per cui estratta la radice $25 \frac{1}{2}$, la medesima darà AE, ed in conseguenza la divisoria FG parallela alla base.

2. Dato un capotagliato noto, terminarlo in triangolo, e calcolarne tutto lo straniero. In questo problema tre casi possono accadere. O che il capotagliato abbia un lato perpendicolare, e sia per conseguenza rettangolo; o che due lati convergono al di sopra della base, per cui la

perpendicolare tirata dal punto di convergenza cade sopra della base; o finalmente la convergenza de' due lati porta il punto della convergenza fuori della base, per cui la perpendicolare cade anche al di fuori.

Fig. 114 1. In quanto al primo caso, sia il capotagliato BCED, rettangolo in E, e che abbia BC di 19, DE di 32, l'altezza CE di 20, e tutta la quadratura 510. Per terminarlo in triangolo, si continui EC sino ad A, dove s'incontra col prolungamento di DB, ed avremo il triangolo straniero ABC, del quale sappiamo la sola base BC di 19. Si cerca l'altezza CA, e la sua quadratura. Per trovare l'altezza si faccia così. Da B si cali BF perpendicolare a DE, che sarà uguale, e parallela a CE, e che taglia di DE la parte FD di 13. Si dica dunque. Come DF di 13 sta ad FB di 20, così tutto DE di 32 a tutto EA, che si trova $49\frac{1}{2}$. E poichè EC è di 20, così il resto CA sarà $29\frac{1}{2}$. Avuto questo, si moltiplichi la base BC per la metà dell'altezza CA, ed il prodotto $277\frac{1}{2}$ sarà la quadratura richiesta.

Fig. 115 2. In quanto al secondo caso, sia il capotagliato BDGE, i di cui lati EB, GD convergono al di sopra della base, ed il medesimo abbia BD di 23, EG di 43, l'altezza FC di 20, e tutta la quadratura 660. Per terminarlo in triangolo, si continui EB, GD, finchè si uniscano in A, ed avremo il triangolo straniero ABD, di cui sappiamo la sola base BD di 23. Si cerca l'altezza CA, e la sua quadratura. Per trovare l'altezza CA si faccia così. Dal punto C si tiri CH parallela a BE, indi CI parallela a DG, ed avremo EH uguale a BC, ed IG uguale a CD, e sarà HF di 12, FI di 8, e tutto HI di 20. Quindi diremo. Come HI di 20 sta ad FC di 20, così tutto EG di 43 a tutto FA, che si trova 43, come è chiaro. E poichè FC è di 20, così il resto CA sarà 23. Avuto questo, si moltiplichi la base BD per la metà dell'altezza CA, ed il prodotto 264 $\frac{1}{2}$ sarà la quadratura.

Fig. 116 3. In quanto al terzo caso, sia il capotagliato BCED, i cui lati DB, EC convergono al di fuori della base, e che abbia BC la lunghezza 17, DE sia 33, l'altezza CG di 20, e tutta la quadratura 500. Per terminarlo in triangolo, i due lati convergenti DB, EC si distendano, finchè si uniscano in A, ed avremo il triangolo straniero ABC, del quale sappiamo la sola base BC di 17. Si cerca la sua altezza AL, e la sua quadratura. Per trovare l'altezza, poichè la figura è obliqua, perciò la perpendicolare AF cade fuori della

base; indi dal punto C si tiri la perpendicolare CG, e si misuri EG, e sia 12, e GF, e sia 13. Si dica dunque. Come EG di 12 sta a GC di 20, così tutto EF di 25 a tutto FA, che si trova $41 \frac{1}{2}$. Si tolga da questa l'altezza FL uguale a GC di 20; resta LA di $21 \frac{1}{2}$ per l'altezza del triangolo straniero. Si moltiplichino dunque la base BC per la metà dell'altezza LA, ed il prodotto $184 \frac{1}{2}$ sarà la quadratura.

3. *Dato un capotagliato noto, tagliarne una porzione con una divisoria parallela alla base.* Nella risoluzione di questo problema tre casi possono accadere. O che il capotagliato abbia un lato perpendicolare; o che due lati convergono al di sopra della base; o finalmente che due lati convergono al di fuori della medesima.

1. In quanto al primo caso, sia il capotagliato BCED, ^{Fig. 117} quale abbia BC di 24, DE di 46, l'altezza CE di 28, e la sua quadratura 980. Si cerca, contando dal punto C, tagliarne una porzione 180 con una divisoria parallela alla base DE.

Per vedere da quale punto della perpendicolare JE si deve tirare la divisoria, egli è necessario, che il capotagliato diventi triangolo, come ADE, per cui abbiamo il triangolo straniero ABC, del quale sappiamo la base BC di 24. E mestieri dunque, che conosciamo l'altezza CA, e tutta la sua quadratura. Per saper tutto questo, noi ci serviremo dell'antecedente problema, e conosceremo l'altezza CA di $30 \frac{1}{2}$, e la quadratura dello straniero $366 \frac{1}{2}$. Seguito tutto questo apparecchio, e perchè si deve staccare del capotagliato la parte 180, noi a questa quantità uniremo la quadratura straniera, ed avremo la somma $546 \frac{1}{2}$, che si dovrà tagliare contando dal vertice A. Per eseguirlo faremo uso della solita regola. Come tutta la quadratura $1346 \frac{1}{2}$ del triangolo intero ADE sta al quadrato $3427 \frac{1}{2}$ di tutta l'altezza EA, così la parte $546 \frac{1}{2}$, che si vuole tagliare, composta da 180 e dallo straniero, al quarto proporzionale. Fatto il calcolo, si trova $1391 \frac{1}{2}$ presso a poco, il quale rappresenta il quadrato della lunghezza, che si deve contare da A, per cui estratta da questo numero la sua radice $37 \frac{1}{2}$ presso a poco, la medesima darà AF, e perchè AC come straniero è $30 \frac{1}{2}$, così il dippiù $6 \frac{1}{2}$ lo conteremo da C sino ad F, e tirando FG parallela alla base DE, questa sarà la divisoria richiesta.

2. In quanto al secondo caso, sia il capotagliato BDGE, ^{Fig. 118}

il quale abbia BD di 28, EG di 63, l'altezza FC di 28, e tutta la quadratura 1274. Si cerca, contando dal punto C, tagliarne una porzione 480 con una divisoria parallela alla base EG. Acciò si esegua tutto questo, egli fa uopo, che il capotagliato diventi triangolo, come AEG, e ne nasce il triangolo straniero ABD, del quale si conosce la sola base BD di 28. Si deve ora sapere la sua altezza CA, e tutta la sua quadratura. Per eseguir tutto questo, noi faremo uso delle regole esposte, e sapremo l'altezza CA di $22 \frac{1}{2}$, e la sua quadratura $313 \frac{1}{2}$. Eseguita questa preparazione, bisogna staccare dal capotagliato la porzione 480. Uniremo dunque la porzione 480, e la quadratura straniera $313 \frac{1}{2}$, ed avremo la somma $793 \frac{1}{2}$, che si dovrà tagliare, contando dal vertice A. Per eseguirlo si faccia uso della solita regola. Come la quadratura $1587 \frac{1}{2}$ dell'intero triangolo AEG sta al quadrato $2540 \frac{1}{2}$ di tutta l'altezza FA, così la parte, che si deve tagliare $793 \frac{1}{2}$, composta dalla parte 480, e dall'apparecchio straniero $313 \frac{1}{2}$, al quarto proporzionale. Fatto il calcolo, si trova 1270 presso a poco, che dinota il quadrato della lunghezza, che si deve contare da A; per cui estratta la radice $35 \frac{1}{2}$, la medesima darà AH, e perchè lo straniero CA è di $22 \frac{1}{2}$, così il dappiù $13 \frac{1}{2}$ si conterà da C sino ad I, e quindi la linea KHI sarà la divisoria parallela alla base EG.

Fig. 119 3. In quanto al terzo caso, sia il capotagliato BCED, il quale abbia BC di 18, DE di 35, l'altezza CG di 33, e tutta la quadratura $874 \frac{1}{2}$. Si cerca, contando dal punto C, tagliarne una porzione 320 con una divisoria parallela alla base DE. Per eseguir questo taglio, fa uopo, che il capotagliato diventi triangolo ADE, del quale il triangolo ABC sarà lo straniero, di cui si conosce la sola base BC di 18. Calcoleremo la sua altezza LA per saperne la sua quadratura. Facendo uso delle regole esposte, ritroveremo l'altezza LA di $35 \frac{1}{2}$, e la sua quadratura $318 \frac{1}{2}$. Fatto questo, si dovrà staccare dal capotagliato una porzione 320. Uniremo la porzione 320 colla straniera quadratura $318 \frac{1}{2}$, ed avremo la somma 638 $\frac{1}{2}$, la quale si dovrà tagliare in una lunghezza contata dal vertice A. Per eseguirlo, si dica così. Come la quadratura $1192 \frac{1}{2}$ di tutto il triangolo ADE sta al quadrato $4672 \frac{1}{2}$ in circa di tutta l'altezza FA, così la parte 638 $\frac{1}{2}$ composta dalla porzione 320, e dall'apparecchio straniero $318 \frac{1}{2}$, al quarto proporzionale. Fatto il

calcolo, si trova $2500 \frac{1}{4}$ presso a poco, che dinota il quadrato della lunghezza, che si deve contare da A, per cui estratta la radice 50 in circa, la medesima darà la lunghezza, che si deve prendere nella perpendicolare AF dal punto A; e poichè il lato straniero AL è di $35 \frac{4}{11}$, così il dippiù $14 \frac{2}{11}$ lo conteremo da C sino ad H, e la linea IK sarà la divisoria parallela alla base DE.

4. *Dato un parallelogrammo noto, tagliarne una porzione con una divisoria trasversale.* Due casi possono accadere: o che il parallelogrammo sia rettangolo, o che sia obbliquangolo. Sia in primo luogo il parallelogrammo rettangolo ABDC, il quale abbia AB di 27, AC di 34, e la quadratura 915. Si cerca dal punto E tagliarne una porzione 400 con una divisoria trasversale. Per eseguirlo, il taglio deve farsi in forma di capotagliato o operando così. Si misuri EC di 13. Si divida 400 per $13 \frac{1}{2}$ metà del lato divisore CD, e dal quoziente $29 \frac{1}{3}$ si sottragga EC di 13, ed il residuo $16 \frac{2}{3}$ darà DF, e la linea EF sarà la divisoria trasversale. Fig. 120

Sia in secondo luogo il parallelogrammo obbliquangolo ABDC, che abbia AB di 34, alla quale sono uguali HG, CD, e l'altezza BF di 33, e tutta la quadratura 1122. Si cerca dal punto G tagliarne una porzione 450 con una divisoria trasversale. La esecuzione di questo problema si può fare in due maniere. Primieramente dal punto G si tiri GH parallela a CD, e sia GE di 9, per cui la quadratura del parallelogrammo DH sarà 306. Ora poichè dobbiamo tagliarne 450, così sottraendo 306 da 450, il residuo 144 lo taglieremo da HB, servendoci di GH per lato di appoggio, e di HA per lato d'incidenza. Diviso dunque 144 per 17, metà di GH, il quoziente $8 \frac{2}{7}$ darà l'alzata HK, e tirata la parallela KI, la linea GI sarà la divisoria trasversale.

L'altra maniera di fare lo stesso taglio è così. Si faccia EL uguale a DC con abbassare la perpendicolare IIL. Ora la porzione 450 da tagliarsi si divida per 17, metà del lato divisore EL, e dal quoziente $26 \frac{2}{7}$ si sottragga GE di 9, ed il residuo $17 \frac{4}{7}$ sarà l'altezza LK, e tirata la parallela KI, la linea GI sarà la divisoria trasversale, che si voleva.

5. *Dato un Triangolo noto, tagliarne una porzione con una divisoria trasversale.* Sia il triangolo EBD, che Fig. 121 abbia l'altezza EC di 35, BC di 16, CD di 45, e la quadratura intera 1067 $\frac{1}{2}$. Si cerca dal punto A tagliarne la metà 533 $\frac{1}{2}$. Per tagliare questa metà, egli è di mestieri ese-

guire la preparazione seguente. Si tirino le linee de' quadranti AF, AH, che si debbono calcolare amendue, e si misuri soltanto AD di 25, restando AE di 32, essendo tutto DE di 57. Per trovare AF si dica. Come tutto DE di 57 sta ad EC di 35, così la parte DA di 25 alla linea AF, che si trova $15\frac{1}{3}$. Per sapere FD si dica. Come tutto EC di 35 sta a CD di 45, così AF di $15\frac{1}{3}$ ad FD, che si trova $19\frac{2}{3}$; e perchè CD è di 45, resterà FC di $25\frac{1}{3}$. Ora essendo CF uguale e parallela a AG, sarà anche questa $15\frac{1}{3}$, per cui il resto GE sarà $19\frac{2}{3}$. Inoltre per sapere GH si dica. Come tutto EC di 35 sta tutto CB di 16, così la parte EG di $19\frac{2}{3}$ alla parte GH, che si trova $15\frac{1}{3}$. Quindi avremo del triangolo AEH la base AH di 35, l'altezza EG di $19\frac{2}{3}$, e sarà la sua quadratura $337\frac{1}{3}$ in circa, moltiplicando la base per la metà dell'altezza.

Eseguita questa necessaria preparazione, poichè dal punto divisorio A dobbiamo tagliare la metà $533\frac{1}{3}$ di tutto il triangolo BDE; e poichè la divisoria trasversale cade nel lato della incidenza HB, così noi da questa metà ne toglieremo prima la quadratura $337\frac{1}{3}$ del triangolo AEH, ed il residuo poi $196\frac{2}{3}$ lo taglieremo dall'altro pezzo, servendoci di AH per lato di appoggio. Diviso perciò la quantità $196\frac{2}{3}$ per $17\frac{1}{3}$ metà di AH, il quoziente $11\frac{1}{3}$ darà l'alzata interna HI, la parallela IK, e la linea AK sarà la divisoria trasversale.

6. Dato un Trapezio noto, tagliarne una porzione con una divisoria trasversale. Sia il trapezio noto BCDEGH la cui intera quadratura sia $2139\frac{1}{3}$. Si cerca dal punto A dividerlo in due porzioni uguali con una divisoria trasversale. Poichè la divisoria per $1069\frac{1}{3}$ è metà del trapezio dato, dal punto A cade nel lato opposto CB, così noi ci serviremo di AD per lato di appoggio. Intanto la quadratura $258\frac{2}{3}$ del triangolo DAE si sottragga dalla metà $1069\frac{1}{3}$ da tagliarsi, ed il residuo, che rimane $811\frac{1}{3}$ sarà quello, che taglieremo, servendoci di AD per lato di appoggio, e di BC per quello d'incidenza. E perchè questi due lati convergono al di fuori del trapezio, così gli uniremo in I, e ci serviremo della pratica dell'apparecchio straniero mutilato, che si deve calcolare. Supponiamo già fatto questo calcolo, da cui conosceremo la lunghezza straniera DI di $20\frac{4}{7}$, e la quadratura straniera $381\frac{1}{3}$ in circa. Unendo adunque la porzione residua da tagliarsi $811\frac{1}{3}$ coll'apparecchio stra-

Fig. 123

niero $381 \frac{1}{2}$, avremo la somma $1192 \frac{1}{2}$ circa, la quale divisa per $33 \frac{1}{3}$, metà dell'interno AI, il quoziente $36 \frac{4}{9}$ darà l'alzata DK, la parallela KL, e la linea AL sarà la divisoria trasversale, che divide in due parti uguali il trapezio dato.

7. *Dividere qualsivoglia figura da più punti diversi.*

Sia una figura BCDEG da dividersi da più punti diversi, Fig. 126
incominciando dal punto A. Si faccia la solita preparazione, e riduzione per averne la intera quadratura, che si trova di 2050, della quale A sia 200, B di 480, C di 280, D di 600, ed E di 490, e che la linea AF sia il primo lato di appoggio.

Per dare ad A la parte 200, poichè ne abbiamo 150 nel triangolo AFG, così il dippiù 70 lo prenderemo nell'altra parte, servendoci di AF per lato di appoggio, e di FE per lato d'incidenza. Diviso dunque 70 per 15, metà di AF, il quoziente $5 \frac{1}{3}$ darà l'alzata FR, e tirata la parallela RS, la linea AS sarà la divisoria per A, compresa da ASG.

Per dare a B la porzione 480 dal punto divisorio S, si faccia così. Dal punto S si tiri la linea de' quadranti SP, ed avremo il triangolo SEP, il quale calcolato secondo le regole esposte, si trova di quadratura $88 \frac{1}{2}$, e la sua base SP di $30 \frac{1}{2}$, circa. Quindi dalla quantità 480 sottratto $88 \frac{1}{2}$, il dippiù $391 \frac{1}{2}$ lo prenderemo dall'altra parte, servendoci di SP per lato di appoggio. Ed essendo questo il lato di appoggio, quello d'incidenza essendo DH, perciò in questo caso ci dovremo servire dell'apparecchio straniero angolare DNP. Supponiamo calcolato questo straniero, e sapremo, che la base NP sia $17 \frac{1}{2}$ circa, l'altezza DO di $13 \frac{1}{2}$, e tutta la sua quadratura 116. Unendo questo straniero alla porzione residua da tagliare, avremo la somma $507 \frac{1}{2}$, la quale divisa per 24, metà di tutto SN, il quoziente $21 \frac{1}{2}$ circa darà l'alzata OM, e tirata poi la parallela ML, la linea SL sarà la divisoria per B.

Per dare a C la parte 280, si faccia così. Poichè il punto divisorio lo vogliamo in L, così tireremo la linea de' quadranti KL, che ci servirà per lato di appoggio. E poichè il lato d'incidenza è CB, così stendendo BC per CK, ne nasce lo straniero CXL, che forma l'apparecchio straniero laterale, che bisogna calcolare. Supponiamo eseguito questo calcolo, dal quale sapremo LK di 18, la sua altezza 6, e la quadratura 54. Unendo dunque questo apparecchio 54

colla porzione di C di 280, avremo la somma $33\frac{1}{4}$, la quale divisa per 9, metà di LK, il quoziente 37 circa darà l'alzata KY, e tirata la parallela YX, la linea LX sarà la divisoria per C.

Per dare a D la parte 600, servendoci di I per punto divisorio, si faccia così. Si trovi prima la lunghezza IH, che calcolata sarà $5\frac{1}{2}$, per cui il resto IZ sarà $27\frac{1}{2}$; ed essendo l'altezza ZX di 19 presso a poco, sarà la quadratura del triangolo IZX di $26\frac{1}{2}$. Inoltre perchè XZ poco differisce da BM, possiamo prenderle per uguali, e parallele, ed essendo ZM di 2, sarà la quadratura del perallelogrammo BZ di 38. Finalmente essendo la quadratura del triangolo BMA di 76, avremo per l'intero pezzo IABX la quantità 378; e perchè D ne deve avere 600, così sottraendo 378 dal medesimo, il residuo 222 lo prenderemo dall'altra parte, servendoci di IA per lato di appoggio, e di AS per quello d'incidenza. Diviso dunque 222 per 19 incirca, metà di AI, il quoziente $11\frac{1}{2}$ darà l'alzata AV, e tirata la parallela VT, la linea IT sarà la divisoria per D. Finalmente il residuo ILST di 490 sarà la porzione in E, come ben si capisce.

Fig. 125 8. *Dato un cerchio noto, dividerlo a raggi.* Sia il cerchio BGHI noto, di cui il raggio AB sia 30, il diametro BH sarà 60, la circonferenza $188\frac{1}{2}$, la sua quarta parte $47\frac{1}{2}$, e tutta la quadratura del suo piano circolare $2828\frac{1}{2}$, la cui quarta parte GAB dovrà essere $707\frac{1}{2}$. Ora tutta l'intera quadratura dovrà dividersi in cinque porzioni, delle quali sia A di 570, B di 688, C di 570, D di 500, ed E di $500\frac{1}{2}$; stabilendo il punto divisorio nel centro A, il lato di appoggio il raggio AB, e quello della incidenza l'arco della circonferenza. Per eseguire si fatta divisione à raggi, si prepari il cerchio, facendo così. Si tirino i due diametri BH, GI, che s'intersechino ad angoli retti nel centro A, per cui tutto il cerchio verrà diviso in quattro quadranti, o sieno porzioni uguali, contenendo in questo caso ciaschedun quadrante $707\frac{1}{2}$ di quadratura, e $47\frac{1}{2}$ di lunghezza di arco.

Per dare ad A la sua parte 570, poichè questa può prendersi tutta nel primo quadrante GAB, così noi divideremo la quadratura 570 per 15, metà del lato di appoggio AB, il quoziente 38 darà l'alzata BC, numerandosi dal punto B sull'arco del quadrante, la quale arriva sino al punto C dell'incontro. Quindi tirando AC, questo raggio sarà la prima divisoria per la porzione di A.

Si osservi, che riuscendo qualche volta difficile il numerare sull'arco del quadrante la quantità dell'alzata, noi possiamo usare un altro metodo molto più sicuro. Si calcoli il numero 38 dell'alzata a quanti gradi e minuti dell'arco del quadrante corrisponda, facendo così. L'intera circonferenza $188 \frac{1}{2}$ sta a 38 arco dato, come 360 gradi al quarto proporzionale. Fatto il calcolo, si trovano 72 gradi, e 32 primi presso a poco. Quindi misurando sul quadrante BG i gradi, e minuti calcolati, facendo uso del semicerchio, fisseremo lo stesso punto C della incidenza.

Per dare a B la sua parte 688, perchè dal primo quadrante GAB di $707 \frac{1}{2}$ si è presa la parte di A di 570, così resta del medesimo il residuo GAC di $137 \frac{1}{2}$, e perchè B ne deve avere 688, così noi daremo a B questo residuo del primo quadrante, ed il dippiù $550 \frac{1}{2}$ lo taglieremo dal secondo quadrante GAH, servendoci per lato di appoggio del raggio AG. Quindi dividendo $550 \frac{1}{2}$ per 15, metà del lato di appoggio, il quoziente $36 \frac{1}{3}$ sarà l'alzata GD, e che ridotta a gradi e minuti, secondo la pratica antecedente, avremo 70 gradi, e 6 primi presso a poco; per cui tirando AD, avremo il pezzo CAD per la porzione di B.

Per dare a C la sua parte 570, poichè dal secondo quadrante ne abbiamo tagliata la quantità GAD di $550 \frac{1}{2}$, ci resta il residuo DAH di $156 \frac{1}{2}$, il quale dandolo a C, il resto $413 \frac{1}{2}$, che gli spetta, lo taglieremo dal terzo quadrante HAI, servendoci del raggio AH per lato di appoggio. Quindi dividendo $413 \frac{1}{2}$ per 15, metà del lato di appoggio, il quoziente $27 \frac{1}{3}$ darà l'alzata HE, la quale ridotta a gradi e minuti, avremo 52 gradi, e 39 primi presso a poco; per cui tirando AE, questa sarà la divisoria per la parte di C, compresa nel pezzo DAE.

Per dare a D la sua parte 500, poichè dal terzo quadrante ne abbiamo presa la quantità $413 \frac{1}{2}$ compresa da HAE, il resto del medesimo quadrante EAI, sarà $293 \frac{1}{2}$, che noi daremo a D, al quale bisognano altri 206 $\frac{1}{2}$ per compire 500, e che noi taglieremo dall'ultimo quadrante IAB, servendoci di AI per lato di appoggio. Dunque dividendo $206 \frac{1}{2}$ per 15, metà del lato di appoggio, il quoziente $13 \frac{1}{3}$ darà l'alzata IF, la quale ridotta a gradi e minuti, avremo 26 gradi, e 17 primi presso a poco, per cui tirando AF, questa sarà la divisoria per la parte di D, che vien compresa dal pezzo EAF. Il resto FAB di $500 \frac{1}{2}$ del-

L'ultimo quadrante sarà la porzione di E, come è manifesto.

9. *Dato un cerchio noto, dividerlo a tagli paralleli.*

Fig. 126 Sia il cerchio ACBD noto, il cui raggio sia 30, e la intera quadratura $2828 \frac{1}{4}$. Questa dovrà dividersi in cinque porzioni, delle quali abbia A la quantità 570, B sia di 688, C di 570, D di 500, ed E di $500 \frac{1}{4}$, in modo però, che le divisioni sieno parallele tra di loro. Per eseguire si fatta pratica, bisogna prima preparare tutto il campo del cerchio, facendo così. Si tirino i due diametri AB, CD, che s'intersechino tra di loro ad angoli retti nel centro S; per cui tutto il piano circolare sarà diviso in due semicerchi uguali CAD, DBD, de' quali ciascheduno contiene di quadratura $1414 \frac{1}{4}$, e che avrà ciascheduno nel vertice l'estremo A, e B dell'altro diametro AB; donde nasce, che ogni semicerchio può considerarsi come un triangolo unito all'altro colla base comune rappresentata dal diametro CD, e che i medesimi triangoli hanno i di loro vertici in A, ed in B. Indi si noti, che il raggio AS, ovvero BS essendo 30, il suo quadrato sarà 900. Fatto questo, l'operazione si principia dal vertice A come punto divisorio, e nel punto S poi va a terminare, contando l'alzata nel raggio AS; di poi si principia dall'altro vertice B, e contando parimente in BS, termina finalmente in S, facendo la divisione a ritorno, come qui vedremo.

Per dare ad A la parte 570, poichè nel primo semicerchio CAD, considerato come un triangolo, abbiamo $1414 \frac{1}{4}$ di quadratura, e per altezza AS di 30, il cui quadrato è 900, così per tagliare questa porzione, contando dal vertice A, e che la divisoria resti parallela alla base CD, dobbiamo conoscere a qual punto di AS cada la divisoria, dicendo così. Siccome l'intera quadratura $1414 \frac{1}{4}$ del semicerchio CAD sta al quadrato 900 del suo raggio AS, così la porzione 570, che si vuol tagliare, al quadrato della sua altezza, che è il quarto proporzionale. Fatto il calcolo, si trova il quarto proporzionale $362 \frac{1}{4}$, il quale rappresenta il quadrato dell'altezza, che si deve contare da A; e dal quale estratta la radice 19 presso a poco, la medesima darà AF, per cui tirando EFG parallela alla base CD, avremo la prima divisoria per la parte di A di 570, contenuta nel pezzo EAG.

Per dare a B la sua parte 688, noi uniremo la parte di

A, e di B, ed avremo la somma 1258, la quale potendo entrare nel primo semicerchio, perciò faremo uso della stessa pratica antecedente, dicendo così. La quadratura intera $1414 \frac{2}{7}$ del semicerchio CAD sta al quadrato 900 del suo raggio AS, come la quadratura 1258 di A, e di B al quadrato della sua altezza. Fatto il calcolo, si trova $800 \frac{14}{15}$, che è il quadrato dell'altezza, da cui estratta la radice 28 presso a poco, la medesima si conterà da A, ed arriva in I; quindi dal punto I si tiri HIK parallela alla base CD, e questa sarà l'altra divisoria per la parte di B, contenuta nel pezzo HEGK.

Per dare a C la sua porzione 570, si osservi, che da tutto il semicerchio CAD di $1414 \frac{2}{7}$ avendone levata la parte di A di 570, e quella di B di 688, ci resta il solo residuo 156 $\frac{2}{7}$, il quale non basta per la parte di C; quindi è che il resto, che gli spetta $413 \frac{4}{7}$, dovrà prendersi nell'altro semicerchio, e che deve restare unito col primo residuo per fare un pezzo intero 570. Affinchè tutto questo possa eseguirsi, noi principieremo a tagliare nel secondo semicerchio CBD, e dal vertice B, contando sul raggio BS, l'ultima parte di E di $500 \frac{1}{7}$, indi quella di D di 500, affinchè quello, che ci resta di questo secondo semicerchio, essendo unito col residuo del primo possa formare la parte di C.

Per dare dunque ad E la sua parte $500 \frac{1}{7}$, noi useremo lo stesso artificio de' tagli antecedenti, dicendo così. La quadratura intera $1414 \frac{2}{7}$ del semicerchio CBD sta al quadrato 900 del suo raggio BS, come la parte $500 \frac{1}{7}$ di E al quadrato della sua altezza. Fatto il calcolo, si trova $318 \frac{11}{15}$, il quadrato dell'altezza, per cui estraendone la radice 17 presso a poco, la medesima si conterà da B, ed arriva in P; quindi da questo punto P si tiri OPQ parallela alla base CD, e questa sarà la divisoria per la parte di E contenuta in OBQ.

Per dare a D la sua parte 500, noi uniremo la parte di E, e di D, ed avremo la somma $1000 \frac{1}{7}$, e diremo così. La quadratura intera $1414 \frac{2}{7}$ del semicerchio CBD sta al quadrato 900 del suo raggio BS, come la somma $1000 \frac{1}{7}$ di E, e di D al quadrato della sua altezza. Fatto il calcolo, si trova $636 \frac{24}{25}$, che rappresenta il quadrato dell'altezza, da cui estratta la radice 25 presso a poco, questa si conterà da B, ed arriva in M, dal quale punto si tiri LMN parallela alla base CD, e questa sarà l'altra divisoria per la parte di D, compresa nel pezzo OLNQ.

★

Finalmente avendo tolta la quantità $1000 \frac{1}{2}$ da questo secondo semicerchio, ed essendo il medesimo $1414 \frac{1}{2}$, così sottraendo il primo numero dal secondo, ci resta l'avanzo $413 \frac{1}{2}$, il quale unendosi all'avanzo $156 \frac{1}{2}$ del primo semicerchio, avremo la quantità 570 , che resta nel mezzo del campo circolare e la daremo a C, che era la sua parte.

Fig. 127 10. *Dato un cerchio noto, dividerlo a tagli concentrici.* Sia il cerchio BF noto, il cui raggio sia 30 , e l'intera quadratura $2828 \frac{1}{2}$. Questo dovrà dividersi in quattro porzioni, delle quali sia A di 680 , B di 690 , C di 710 , e D di $748 \frac{1}{2}$, in modo però, che le divisorie debbano essere tutte a cerchi concentrici. Per eseguire sì fatto problema, si tiri il raggio AB sul quale si debbano numerare le lunghezze da A verso B.

Per dare ad A la sua parte 680 , poichè questa prima parte deve situarsi nel mezzo, e rappresentare un piano circolare, perciò dobbiamo ritrovare la lunghezza proporzionata del raggio, che le conviene, facendo uso della seguente regola, dicendo così. La intera quadratura $2828 \frac{1}{2}$ del cerchio BF sta al quadrato 900 del suo raggio AB , che è lungo 30 , come la parte 680 di A al quadrato del suo raggio corrispondente. Fatto il calcolo, si trova $215 \frac{1}{2}$, che dinota il quadrato del raggio, che spetta alla porzione 680 , e dal quale estratta la radice 14 presso a poco, la medesima indica la lunghezza del raggio richiesto da A sino ad E; quindi fatto centro in A, ed intervallo in E, si descriva la prima circonferenza, che sarà la divisoria per la parte di A.

Per dare a B la sua parte 690 , si unisca la parte di A, e di B in una somma, ed avremo la quantità 1370 . Indi si dica. La quadratura intera $2828 \frac{1}{2}$ del cerchio BF sta al quadrato 900 del suo raggio AB , come la somma 1370 di ambe le porzioni al quadrato del raggio corrispondente. Fatto il calcolo, si avrà $435 \frac{1}{2}$, che indica il quadrato del raggio che si cerca, e dal quale estratta la radice 20 presso a poco, questa darà la lunghezza AD ; per cui fatto centro in A, ed intervallo D, si tiri l'altra circonferenza, che sarà la seconda divisoria, e lo spazio anulare compreso tra la prima e la seconda circonferenza, sarà la porzione di B.

Per dare a C la sua parte 710 , si unisca la parte di A, di B, e di C in una somma; ed avremo la quantità 2080 . Indi si dica. La quadratura intera $2828 \frac{1}{2}$ del cerchio BF sta al quadrato 900 del suo raggio AB , come la somma 2080 delle

tre porzioni al quadrato del raggio corrispondente. Fatto il calcolo, si avrà $661 \frac{1}{4}$, indicante il quadrato del raggio, che si cerca, per cui estraendo la radice 25 presso a poco, questa darà la lunghezza del raggio ricercato, misurandolo da A sino a C; quindi fatto centro in A, e intervallo C, si tiri l'ultima divisoria, la quale contiene la porzione di C.

Finalmente dalla intera quadratura $2828 \frac{1}{4}$ avendone tolta la somma 2080, che esprime la porzione di A, di B, e di C, ci resta l'avanzo $748 \frac{1}{4}$, e che noi daremo a D, che è l'ultima porzione, che doveva stabilirsi.

§. III.

La Intersecazione

Dopo di aver percorse tutte le regole della intera Divisione ordinaria, e straordinaria, stimiamo nostro indispenabile dovere, come un compimento di tutto l'artificio divisorio, di esporre le maravigliose regole della *Intersecazione*, le quali costituiscono la parte la più sublime della divisione istessa. Si fatte regole sono le seguenti.

1. *Dati due triangoli opposti al vertice colle di loro basi parallele, e note, e data dippiù l'altezza perpendicolare tra le stesse, ritrovare l'altezza di ciaschedun triangolo, e la di loro quadratura.* Nella risoluzione di questo problema due casi possono accadere; o che l'altezza perpendicolare passi pe' di loro vertici opposti, e resti tutta dentro dei triangoli; o che la medesima perpendicolare stia fuori de' triangoli, quando sieno obbliqui. Fig. 128

1. Sia il primo caso de' due triangoli BAC, DAE opposti nel vertice A, e che le basi BC, DE sieno parallele, e che l'altezza perpendicolare FG passi pe' vertici in A. Sieno le basi BC di 27, DE di 58, e la comune altezza GF di 54. Si cerca l'altezza particolare AF del triangolo BAC, e la sua quadratura; e si cerca l'altezza particolare AG del triangolo DAE, e la sua quadratura. Per sapere l'altezza AF si dica così. La somma 85 delle due basi prese insieme sta a tutta l'altezza 54, come la sola base BC di 27 alla sua altezza FA, che si trova $17 \frac{1}{4}$. Quindi l'altezza AG dell'altro triangolo DAE sarà $36 \frac{1}{4}$. Ritrovate le particolari altezze de' due triangoli, sarà facile di ritrovarne le di loro rispettive quadrature, moltiplicando di ciascheduna la base per la metà del-

la propria altezza, ed avremo perciò la quadratura $231 \frac{1}{2}$ pel triangolo BAC, e la quadratura $1068 \frac{1}{2}$ pel triangolo DAE.

Fig. 129 2. Sia il secondo caso de' due triangoli BAC, DAE opposti nel vertice A, e che le basi BC DE sieno parallele, e che l'altezza perpendicolare CG esca fuori de' triangoli. Sieno le basi BC di 27, DE di 57, e la comune altezza CG di 54. Si cerca l'altezza particolare CF del triangolo BAC, e la sua quadratura; e si cerca l'altezza particolare FG del triangolo DAE, e la sua quadratura. Per sapere l'altezza CF, si dica così. La somma 64 delle due basi prese insieme sta a tutta l'altezza GC di 54, come la sola base BC di 27 alla sua altezza CF, che si trova $22 \frac{1}{2}$. Quindi l'altezza GF dell'altro triangolo DAE sarà $31 \frac{1}{2}$. Ritrovate così le particolari altezze de' due triangoli, sarà facile ritrovarne le di loro rispettive quadrature, moltiplicando di ciascheduno la base per la metà della propria altezza, ed avremo perciò la quadratura $307 \frac{1}{2}$ pel triangolo BAC, e la quadratura $577 \frac{1}{2}$ pel triangolo DAE.

Avvertasi in questo problema, che se di due triangoli opposti al vertice, che abbiano le due basi parallele, noi ne conoscessimo le rispettive altezze, e la base di uno di questi triangoli, potremmo sapere la base dell'altro, dicendo così. L'altezza di un triangolo sta alla propria base, come l'altezza dell'altro triangolo alla sua base, che si cerca. Finalmente la pratica esecuzione di questo importantissimo problema si dice *Intersecazione*, essendo questa la base delle regole seguenti.

2. *Dato un triangolo rettangolo noto, del quale un cateto sia lato di appoggio, unire al medesimo un altro triangolo, e servirci dello stesso lato di appoggio.*

Fig. 130 Sia il triangolo ABC rettangolo in B, di cui il cateto AB sia 40, il cateto BC di 20, e la sua quadratura 400. Si cerca di aggiungere al medesimo un'altro triangolo, che abbia 200 di quadratura, con servirci di AB per lato di appoggio. Per farlo, si unisca la quadratura 400 del triangolo dato ABC colla quadratura 200 dell'altro triangolo, che si vuole aggiungere, e la somma 600 si divida per 20, metà di AB, e dal quoziente 30 tolto via BC di 20, il residuo 10 si numera nella prolungazione CD, e tirata AD, il triangolo ACD sarà quello di 200, che si cercava unire al primo, servendoci dello stesso lato AB di appoggio. La pratica di questo problema si dice

Regola de' Cateti; giacchè ci serviamo del medesimo catego-
to, come lato di appoggio, per aggiungere altra quantità ad
un' altra data quantità.

3. *Dividere un trapezio ad angoli rientranti da un punto preso in un angolo, e che accada la intersecazio-
ne, servendoci della regola de' cateti.* Sia il trapezio ad
angoli rientranti ADHI da dividersi in tre porzioni dal punto Fig. 131
divisorio A preso in un angolo. Si faccia la sua preparazione
col tirare la linea AB di 60, mediante la quale il trapezio
verrà diviso in due parti. Nelle medesime si esegua la neces-
saria riduzione, acciò si abbia di ciascheduna parte la pro-
pria quadratura, la quale al solito si noti dirimpetto per co-
noscere la intera quadratura $2088 \frac{1}{2}$ di tutto il trapezio, la
quale vada divisa in tre porzioni, di cui A sia di 500, B di
1180, e C di $408 \frac{1}{2}$, e sia la linea de' quadranti AB il lato di
appoggio.

Per dare ad A la porzione 500, si avverta, che dovendoci
servire di AB di 60 per lato di appoggio, così noi faremo il
taglio alla rovescia. E perchè il pezzo AICHB contiene 925,
così noi sottrarremo la parte 500 da questo pezzo, ed il re-
siduo 425, sarà quello che taglieremo alla rovescia, affinchè
resti in due pezzi il quantitativo per A di 500. Si divida dun-
que 425 per 30, metà di AB, ed il quoziente $14 \frac{1}{3}$ darà l'al-
zata esterna BX, la parallela XY; e la linea AY sarebbe la
divisoria, la quale lascia verso il lato AB la quantità 425, e
stabilisce la porzione di A di 500 ne' due pezzi YHT, VIA.
Ora egli è da osservarsi, che questa divisoria non cade tutta
dentro dello spazio della figura, ma esce fuori per la lun-
ghezza VT, e forma il triangolo VCT, che è tutto stranie-
ro, la cui quadratura manca per conseguenza alla quan-
tità tagliata. Quindi è, che questo triangolo straniero biso-
gna calcolarlo, affinchè la sua quantità si aggiunga al taglio
fatto, e si torni ad operare.

Per calcolare questo triangolo straniero, si faccia così. La
linea NC si distenda in S, ed avremo due triangoli stranie-
ri CSV, CST, de' quali ognuno ha il suo triangolo compa-
gno colle basi parallele, e sono CSV, VIK, gli altri due sono
CST, THB, de' quali bisogna calcolare le perpendicolari
de' triangoli stranieri CSV, SCT per averne le quadrature;
dippiù è necessario sapere la di loro base comune CS, e fi-
nalmente calcoleremo le basi BH, KI de' triangoli compagni
rispettivi, e ci ritroveremo perciò ad eseguire la indispensa-

bile regola della intersecazione, la quale ci dà il modo, come calcolare le seguenti lunghezze.

Per ritrovare la base CS si faccia così. Dal punto Y si tiri YR uguale, e parallela con XB di $14\frac{1}{2}$, e poi si calcoli RB dicendo così. Tutto HQ di 28 sta a tutto QB di 4, come YR di $14\frac{1}{2}$ alla porzione RB, che si trova 2 in circa. Ed essendo AB di 60, sarà AR di 58. Fatta questa prima operazione, per trovare CS si dica. Tutto AR di 58 sta ad RY di $14\frac{1}{2}$, come la parte AN di 35 alla porzione NS, che si trova $8\frac{1}{2}$ circa, da cui tolto NC di 5, resta la linea straniera CS di $3\frac{1}{2}$, che dinota la base comune de' triangoli stranieri.

Per ritrovare la base BH si faccia così. Tutto AR di 58 sta ad RY di $14\frac{1}{2}$, come AQ di 56 a QB, che si trova 13 presso a poco; e poichè tutto QH è 28, così resta la base BH di 15. Ora in questi due triangoli della prima intersecazione CST, THB abbiamo la base CS di $3\frac{1}{2}$, e la base BH di 15, e la di loro altezza comune essendo QN di 21, dobbiamo ritrovare l'altezza particolare del solo triangolo CST dicendo così. La somma $18\frac{1}{2}$ delle due basi parallele CS, BH sta alla di loro comune altezza QN di 21, come la sola base CS di $3\frac{1}{2}$ alla propria altezza, che si trova $3\frac{1}{2}$ circa. Quindi moltiplicando la base per la metà dell'altezza, il prodotto $4\frac{1}{2}$ sarà la quadratura del primo triangolo straniero CST della intersecazione.

Inoltre per ritrovare la base KI del triangolo VKI compagno del triangolo CSV per la seconda intersecazione, si dica così. Tutto AR di 58 sta a tutto RY di $14\frac{1}{2}$, come AL di 8 ad LK, che si trova 2 circa; e poichè LI è di 26, così resta la base KI di 24. Ora in questi due triangoli CSV, VIK di questa seconda intersecazione, abbiamo la base CS di $3\frac{1}{2}$, e la base KI di 24, e la di loro comune altezza essendo NL di 27, dobbiamo trovare l'altezza particolare del solo triangolo CSV dicendo così. La somma $27\frac{1}{2}$ delle due basi parallele CS, KI sta alla di loro comune altezza NL di 27, come la sola base CS di $3\frac{1}{2}$ alla propria altezza, che si trova $3\frac{1}{2}$ circa. Quindi moltiplicando la base per la metà dell'altezza, il prodotto $3\frac{1}{2}$ sarà la quadratura del secondo triangolo CSV della intersecazione. Poichè dunque abbiamo la quadratura $4\frac{1}{2}$ del primo triangolo straniero, e la quadratura $3\frac{1}{2}$ del secondo, così la di loro somma $7\frac{1}{2}$ sarà la quadratura di tutto il triangolo straniero TCV. Que-

sta quantità è quella, che manca a 425, che noi abbiamo tagliata, servendoci di AB per lato di appoggio; per cui al medesimo numero di 425 dobbiamo unirvi il mancante $7\frac{1}{2}$ circa, ed operare di nuovo, servendoci dello stesso lato di appoggio AB come un cateto.

Unendo a 425, che si deve tagliare, lo straniero $7\frac{1}{2}$ risultato dal calcolo della intersecazione, e mancante alla quantità divisa, avremo la somma $433\frac{1}{2}$. Questa somma si divida per 30, metà dello stesso lato di appoggio AB ed il quoziente $14\frac{1}{3}$ darà la lunghezza BZ; e perchè BX è di $14\frac{1}{3}$, così allungando da X il dippiù $\frac{1}{3}$, avremo XZ pel dippiù dell'alzata, e tirata la parallela ZD, la linea AD sarà la divisoria richiesta. Ora questa seconda divisoria sebbene abbia dato alla quantità 425 il suo mancante, pure taglia un altro poco dello straniero, per cui si dovrebbe eziandio calcolare; ma perchè l'allungamento XZ è di una piccola frazione, così il secondo straniero che risulta tra il primo triangolo straniero, e la seconda divisoria, essendo picciolissimo, perciò si può trascurare; altrimenti si tornerebbe ad operare, ed istituire di nuovo la regola della intersecazione. Quindi possiamo conchiudere, che la divisoria seconda AD sia senza error sensibile prossimamente la vera, la quale separa la parte di A di 500 ne' due pezzi segnati, lasciando appoggiato sopra AB il residuo del primo pezzo 425 prossimamente.

Per dare a B la porzione 1180, poichè ne abbiamo nel primo pezzo il residuo 425, perciò il dippiù 755 lo dobbiamo tagliare nell'altro pezzo. Ora poichè tagliando questa quantità, e servendoci di AB per lato di appoggio, la divisoria non cade nel lato BG, ma nel lato GD, perciò sarà uopo servirvi dell'apparecchio straniero angolare BGK, che si deve calcolare. Supponiamo già fatto questo calcolo, per cui sapremo, che la base straniera BK sia $15\frac{1}{2}$, e tutta la quadratura straniera di $85\frac{1}{2}$. Dunque alla quantità 755 unita $85\frac{1}{2}$, avremo la somma intera $840\frac{1}{2}$, la quale divisa per $37\frac{1}{2}$ metà di tutto AK, il quoziente $22\frac{1}{2}$ presso a poco, darà l'alzata CX, la parallela XZ, e la linea AZ sarebbe la divisoria per la parte di B di 1180, contenuta da ZAD, lasciando poi in due pezzi ZDS, GEA la parte ultima di C. Ma perchè questa divisoria AZ non cade tutta nello spazio della figura, ed esce fuori per GS, perciò forma un triangolo straniero SFG, la cui quadratura manca alla porzione

tagliata 755, ed ecco perchè sarà mestieri calcolarlo, acciò la sua quantità si unisca alla parte tagliata, e si torni ad operare.

Per calcolare questo triangolo straniero, si faccia così. La linea MF si distenda sino a Q, ed avremo due triangoli stranieri SQF, QFG, de' quali ciascheduno ha il suo triangolo compagno colle basi parallele, che sono SFQ, SDP, gli altri due sono QFG, GEO, de' quali bisogna calcolare le altezze de' triangoli stranieri SFQ, QFG per averne le quadrature; dippiù calcoleremo la di loro base comune FQ; e finalmente calcoleremo le basi DP, EO de' triangoli compagni rispettivi, e così faremo di nuovo il calcolo della intersecazione per le seguenti lunghezze.

Per ritrovare la base FQ si faccia così. Dal punto Z si tiri ZP parallela ed uguale ad XC, la quale taglia di tutto AB la parte PB, che si deve sapere, dicendo così. Il lato DO di 35 sta al lato OK di $33\frac{1}{2}$, come il lato ZP di $22\frac{1}{4}$ al lato PK, che si trova $21\frac{1}{4}$ circa. E perchè BK è di $15\frac{1}{2}$, così resta BP di $5\frac{1}{4}$. Ora da tutto AB di 60 tolto via PB di $5\frac{1}{4}$, resta AP di $54\frac{3}{4}$. Fatto questo, conosceremo FQ dicendo così. Tutto AP di $54\frac{3}{4}$ sta a tutto PZ di $22\frac{1}{4}$, come la parte AM di 25 ad MQ, che si trova $10\frac{1}{2}$ circa; e poichè MF è di 6, resterà FQ di $4\frac{3}{4}$, che era la base comune de' due triangoli stranieri.

Per trovare la base DP si dica. Il lato AP di $54\frac{3}{4}$ sta al lato PZ di $22\frac{1}{4}$, come AO di 42 ad OP, che si trova $17\frac{1}{4}$. Saputa la base DP, e la base QF, ed essendo la di loro comune altezza OM di 17, sarà facile di ritrovare l'altezza propria del primo triangolo straniero SFQ, dicendo così. La somma $21\frac{1}{4}$ delle due basi parallele DP, QF sta alla loro comune altezza OM di 17, come la sola base QF di $4\frac{3}{4}$ alla sua propria altezza, che si trova $2\frac{1}{4}$ circa. Quindi moltiplicando la base per la metà dell'altezza, il prodotto $6\frac{3}{8}$ sarà la quadratura del triangolo SFQ della prima intersecazione.

Per ritrovare la base EO si dica così. Tutto AP di $54\frac{3}{4}$ sta a tutto PZ di $22\frac{1}{4}$, come AL di 8 ad LO, che si trova $3\frac{1}{2}$ presso a poco; e perchè tutto LE è di 21, così resta la sola base OE di $17\frac{1}{2}$. Calcolata dunque la base EO, e la base QF, ed essendo la loro comune altezza LM di 17, ritroveremo l'altezza propria del triangolo straniero QFG dicendo così. La somma 21 delle due basi parallele QF, EO

sta alla di loro comune altezza LM di 17, come la sola base QF di $4\frac{1}{2}$ alla propria altezza, che si trova $3\frac{2}{3}$ circa. Quindi moltiplicando la base per la metà dell'altezza, il prodotto $8\frac{1}{3}$ sarà la quadratura del triangolo QFG della seconda intersecazione. Ora unendo le quadrature di ambidue questi triangoli stranieri, la somma $14\frac{1}{2}$ sarà la quadratura di tutto lo straniero SFG. Questa quantità straniera per appunto è quella, che manca al quantitativo 755, che abbiamo tagliato, per cui dobbiamo unire al numero 755 lo straniero $14\frac{1}{2}$, e fare di nuovo la divisione.

Aggiungendo dunque a 755, che si deve tagliare, lo straniero calcolato $14\frac{1}{2}$ mancante alla quantità divisa, avremo la somma $769\frac{1}{2}$, su cui si deve eseguire di nuovo l'operazione, servendoci del medesimo lato di appoggio AB, come un cateto. E poichè ci bisogna eziandio l'apparecchio straniero angolare GKB di $85\frac{1}{4}$, così alla somma uniremo ancora quest'altra quantità, ed avremo in tutto $854\frac{1}{4}$, la quale divisa per $37\frac{1}{2}$, metà di tutto AK, il quoziente $22\frac{1}{2}$ circa darà l'alzata CD; e perchè CX è di $22\frac{1}{2}$, così allungando da X il dippiù $\frac{1}{2}$ sino a D, e tirata poi la parallela DF, la linea AF sarà la divisoria, la quale senza error sensibile può prendersi per esatta, sebbene ci resta un altro sottilissimo straniero. Finalmente i due pezzi FDS, GEA, che uniti insieme fanno $408\frac{1}{2}$, sarà la parte ultima di C, come è chiaro a capirsi.

4. *Dato un Triangolo rettangolo noto, del quale un cateto sia lato di appoggio, unire al medesimo un altro triangolo rettangolo, e fare in modo, che la ipotenusa del primo sia lato di appoggio del secondo.* Sia il triangolo ABC rettangolo in B, del quale il cateto AB sia 20, Fig. 132 il cateto BC di 8, e la sua quadratura 80. Si cerca di aggiungere al medesimo un altro triangolo, che abbia 30 di quadratura, con servirci della ipotenusa AC del primo triangolo per lato di appoggio. Per eseguire tutto questo, è necessario prima di calcolare la lunghezza della ipotenusa AC. Quindi essendo il cateto AB di 20, il suo quadrato sarà 400, ed essendo il cateto BC di 8, il suo quadrato sarà 64. Si sommino insieme questi due quadrati, ed il risultato 464 sarà il quadrato della ipotenusa AC, dal quale estratta la radice $21\frac{1}{2}$ circa, questa sarà la sua vera lunghezza. Ora poichè dobbiamo aggiungere 30, così diviso questo numero per $10\frac{1}{2}$, metà di AC, il quoziente $2\frac{1}{2}$ cir-

ca, darà la perpendicolare, o sia l'alzata CD, per cui tirata AD, il triangolo ACD di 30 sarà quello, che si voleva aggiungere al primo con servirci della ipotenusa AC per lato di appoggio. La pratica di questo problema, noi la diremo sempre in appresso *Regola della Ipotenusa*, perchè ci serviamo della medesima per lato di appoggio, quando si deve unire ad un triangolo dato un'altra data quantità.

Fig. 133 5. *Dividere un trapezio ad angoli rientranti da un punto preso in un angolo, e che accadendo la intersecazione, ci serviamo della regola della ipotenusa.* Sia il trapezio ad angoli rientranti ABDE da dividersi in due porzioni dal punto A preso in un angolo, e sia AE di 61 il lato di appoggio. Si faccia al solito la necessaria riduzione, acciò si abbia la sua intera quadratura 1202 da dividersi in due parti, delle quali A sia 720, e B di 482, servendoci di AE per lato di appoggio.

Per dare ad A la sua parte 720, la medesima si divida per 30 $\frac{1}{2}$, metà di AE, ed il quoziente $23 \frac{1}{2}$, o sia 23 $\frac{1}{2}$ circa, darà l'alzata EF, la parallela FQ, e la linea AQ sarebbe la divisoria per la parte di A. Poichè questa divisoria non cade tutta nello spazio della figura, ma esce al di fuori per LM, perciò si ottiene il triangolo straniero LCM, che bisogna calcolare, acciò la sua quadratura, come mancante alla quantità tagliata, si possa aggiungere alla medesima, e rifare l'operazione. Per calcolare adunque lo straniero, la retta IC si continui sino a K, ed avremo la retta straniera CK, che si deve calcolare, facendo la base comune de' due triangoli stranieri. LKC, MKC, e si operi nel modo seguente. Dal punto Q si abbassi la perpendicolare QP uguale, e parallela ad FE di $23 \frac{1}{2}$, la quale stacca di tutto AE la porzione PE, che si deve calcolare così. Tutto DH di 43 sta a tutto HE di 19, come QP di $23 \frac{1}{2}$ alla parte PE, che si trova 10 $\frac{1}{2}$ circa; e poichè AE è di 61, così resta PA di 50 $\frac{1}{2}$. Per trovare ora la base straniera CK si dica. Tutto AP di 50 $\frac{1}{2}$ sta a tutto PQ di $23 \frac{1}{2}$, come AI di 29 ad IK, che si trova 13 $\frac{1}{2}$ presso a poco; e poichè IC è di 6, resta CK di 7 $\frac{1}{2}$, che è la base straniera, che si voleva sapere.

Ritrovata così questa base straniera, noi abbiamo da porre in esecuzione due regole d'intersecazione, e la prima sarà de' due triangoli KCM, MDO, e la seconda de' due trian-

goli CKL, LBN, de' quali si cerca la base DO, e la base BN. Quindi per trovare la base DO si dica così. Tutto AP di $50 \frac{1}{2}$ sta a tutto PQ di $23 \frac{1}{2}$, come AH di 42 ad HO, che si trova $19 \frac{1}{2}$; e perchè tutto HD è di 43, così resta OD di $23 \frac{1}{2}$. Sapute dunque le due basi DO, KC, e la di loro comune altezza essendo IH di 15, ritroveremo l'altezza del triangolo KCM dicendo così. La somma $30 \frac{1}{2}$ delle due basi parallele sta alla di loro comune altezza 15, come la sola base KC di $7 \frac{1}{2}$ alla sua altezza propria, che si trova 3 presso a poco. Quindi moltiplicando la base KC per la metà dell'altezza, il prodotto 11 sarà la quadratura del primo triangolo straniero KCM.

Per ritrovare la base BN per la seconda intersecazione, si dica così. Tutto AP di $50 \frac{1}{2}$ sta a tutto PQ di $23 \frac{1}{2}$, come AG di 6 a GN, che si trova $2 \frac{1}{2}$ circa; e perchè tutto GB è di 28, così resta la base NB di $25 \frac{1}{2}$. Conosciute così le due basi KC, BN, e la di loro comune altezza essendo GI di 23, ritroveremo l'altezza del triangolo LKC, dicendo così. La somma $32 \frac{1}{2}$ delle due basi parallele sta alla loro comune altezza 23, come la sola base KC di $7 \frac{1}{2}$ alla propria altezza, che si trova $5 \frac{1}{2}$ circa. Quindi moltiplicando la base KC per la metà dell'altezza, il prodotto 19 presso a poco sarà la quadratura del triangolo straniero LKC. Unendo dunque la quadratura del primo, e del secondo triangolo straniero, avremo la somma 30, che dinota la quantità dello straniero LCM, e che perciò è mancante alla quantità 720, che si era tagliata, e che si deve aggiungere alla medesima, e rifare da capo l'operazione.

Per aggiungere alla quantità tagliata il mancante 30, possiamo servirci di due metodi. Se vogliamo servirci di AE istesso per lato di appoggio, in questo caso uniremo il mancante 30 alla quantità tagliata 720, e la somma 750 la torneremo a dividere per la metà di AE, e ci serviremo della regola de' cateti. Ma se poi questo metodo non voglia praticarsi, in questo caso faremo uso della regola della ipotenusa, e ci serviremo per lato di appoggio della stessa divisoria AQ nel modo, che segue. Poichè la divisoria AQ forma l'ipotenusa del triangolo rettangolo APQ, del quale ci sono noti i due cateti AP di $50 \frac{1}{2}$, e PQ di $23 \frac{1}{2}$, così facendo i quadrati de' medesimi $2562 \frac{1}{2}$ circa, e $552 \frac{1}{2}$, la di loro somma 3115 sarà il quadrato della ipotenusa AQ, per cui estratta la radice 56 circa, questa darà la lunghezza

della ipotenusa AQ, di cui ci serviremo per lato di appoggio. Diviso dunque il mancante 30 per 28, metà di AQ, il quoziente $1\frac{1}{4}$ darà l'alzata perpendicolare dell'altro lato QR, e la prossimamente vera divisoria AR per la parte di A. Il resto della figura diviso in due pezzi ABL, MDR, che uniti insieme fanno 482, costituiscono la porzione di B, come è manifesto.

Le intersezioni eseguite in questi problemi ci fanno conoscere, che la seconda divisoria che si tira, e forse anche la terza per una istessa operazione, taglia sempre un poco dello straniero, il quale a rigore dovrebbe esser calcolato, per cui ad evitare il tedio del calcolo, sogliono i Pratici aggiungere sempre un poco di più alla quantità mancante per supplire quel poco, che nella seconda divisoria suol essere tagliato di straniero. Suol regolarsi questo poco di più che si aggiunge, colla proporzione del 10 per 100 ne' campi piani, ed in proporzione maggiore ne' campi assai disuguali di superficie. Intanto egli è da notarsi, che nella esecuzione di ogni taglio, che finora abbiamo fatto, le divisorie sono state sempre linee tirate in una istessa direzione, e che noi diciamo *catena lunga*. Non così poi accade in altri tagli, che nel seguente esempio esporremo, mentre queste divisorie non possono tirarsi nella stessa direzione, ma debbono spezzare in due, o tre luoghi, per cui diciamo *catena spezzata*, poichè le sue porzioni non sono disposte nella medesima rettitudine. Coll'artificio della catena spezzata noi assegneremo con precisione esatta e perfetta il mancante, che nasce nelle intersezioni, mentrechè colla catena lunga si aveva la sola approssimazione.

Fig. 153. 6. *Dividere una figura nella quale accade la intersecazione de' pezzi stranieri contenuti nello spazio della medesima.* Sia il parallelogrammo rettangolo BCED da dividersi in cinque porzioni dal punto divisorio A preso nello spazio. Poniamo ancora, che in questo parallelogrammo vi sieno quattro pezzi stranieri, le cui quadrature non si debbono comprendere nella quadratura del parallelogrammo. Si faccia al solito la preparazione della figura col tirare le due linee de' quadranti FG, HI, le quali intersecandosi in A ad angoli retti, dividono tutto il parallelogrammo in quattro pezzi minori, in ognuno de' quali vi è un pezzo straniero. Di ciascheduno de' quattro pezzi minori, in cui è diviso il parallelogrammo, si prenda la quadratura per notarsi dirim-

petto, ma dalla medesima si deve prima togliere la quadratura del pezzo straniero ivi contenuto, acciocchè resti la quadratura netta delle quattro parti del parallelogrammo. Per ritrovare poi la quadratura de' quattro pezzi stranieri, noi metteremo in opera la riduzione esterna. Supponiamo già eseguito tutto questo; e sottratta dalla quadratura di ogni pezzo del parallelogrammo la quadratura del suo straniero, resteranno le seguenti nette quadrature. Per AE sarà 864, per AD sarà 702, per AB sarà 581, per AC sarà 831 $\frac{1}{2}$, e che in tutto fanno la quadratura netta 2978 $\frac{1}{2}$ da dividersi in cinque porzioni, delle quali sia A di 364, B di 802, C di 720, D di 620, ed E di 472 $\frac{1}{2}$, e che sia AI il primo lato di appoggio, comecchè una delle quadranti.

Per dare ad A la parte 364, perchè dobbiamo servirci di AI per lato di appoggio, sarà IE quello d'incidenza, per cui divideremo 364 per 16 $\frac{1}{2}$, metà di AI, ed il quoziente 22 circa darà l'alzata IK, e tirata la linea AK, la medesima sarebbe la divisoria per A. Ora si avverta che questa divisoria stacca del corpo straniero ivi contenuto il triangolo NCM, la cui quadratura viene a mancare alla porzione di A. Quindi sarà mestieri di calcolare questo pezzo triangolare straniero, facendo così. Il lato MC si distenda sino in B, e poi si dica. Tutta AI di 33 sta ad IK di 22, come AB di 27 a BM, che si trova 18; e poichè GC è di 12, resta CM di 6. Ora per la intersecazione de' due triangoli opposti al vertice NMC, NAE sappiamo le due basi parallele AE di 12, CM di 6, e la di loro comune altezza AB di 27, ritroveremo l'altezza propria del triangolo NMC dicendo così. La somma 18 delle due basi parallele sta alla di loro comune altezza AB di 27, come la sola base CM di 6 alla propria altezza, che si trova 9. Quindi moltiplicando la base per la metà dell'altezza, il prodotto 27 sarà la quadratura del triangolo straniero NMC.

Questa quadratura 27, calcolata per intersecazione, è quella quantità, che manca alla porzione di A di 364 che si è tagliata, per cui si deve aggiungere ed operare di nuovo. Per rimettere adunque alla porzione di A la quantità mancante, noi potremo farlo secondo il solito a catena lunga, o con servirci della regola de' cateti, o della regola della ipotenusa. Ma qualsivoglia di questi due metodi, a catena lunga sempre l'operazione non può riuscire esattissima a cagione di que' sottilissimi stranieri, che risultano dalle replicate di-

visorie, e che come frazioni minime si tralasciano. Quindi noi abbiamo un altro metodo sicurissimo ed esatto, senza trascurare veruna frazione, come poter aggiungere alla porzione di A il mancante 27, con far uso del metodo della catena spezzata, e che si esegue per tutto questo problema nel modo seguente.

Poichè la divisoria AK tocca in N, ed in M lo straniero, così noi della quantità mancante 27 ne faremo due porzioni regolate a proporzione, e ne aggiungeremo una porzione sopra AN, ed un'altra sopra MK. Sieno adunque le due porzioni 17, e 10, la prima delle quali si aggiungerà ad AN, e l'altra ad MK. Per aggiungere la porzione 17 ad AN, bisognerà prima sapere la lunghezza interna EN, e con essa PN, dicendo così. Tutto KI di 22 sta a tutto IA di 33, come KD di 10 a DN, che si trova 15; e poichè tutto DE è di 33, sarà NE di 18, e quindi PN di 7. Ora moltiplicando la base EN per la metà dell'altezza EA, il prodotto 108 sarà la quadratura del triangolo ANE. E poichè dobbiamo aggiungere ad AN la porzione 17; così ci serviremo del taglio alla rovescia, staccando il residuo 91, servendoci di AE per lato di appoggio, e di EN per lato d'incidenza. Diviso dunque 91 per 6, metà di AE, il quoziente $15\frac{1}{2}$ darà EO, e la prima divisoria AO per la porzione 17 contenuta nel triangolo AON.

Eseguita così la prima operazione, dovremo eseguire la seconda per l'altra porzione 10, aggiungendola ad MK. Per adattare questa porzione, si calcoli prima il capotagliato rettangolo MGFK, il quale, fatto il calcolo, si trova 18; e perchè ci bisognano soltanto 10 verso MK, così il residuo 8 lo staccheremo alla rovescia, servendoci di FG per lato di appoggio, e di GM per lato d'incidenza. Diviso dunque 8 per 3, metà di FG, il quoziente $2\frac{2}{3}$ darà GL, e la linea FL sarà l'altra divisoria per la porzione 10 contenuta da MLFK. Si vede ora, che la divisoria spezzata AO, LF fa il confine della parte di A di 364, e resta del primo pezzo AE il residuo 500, il quale entra nella porzione seguente.

Per dare a B la sua parte 802, noi ne abbiamo nel primo pezzo un residuo 500, per cui il dippiù 302 lo dobbiamo tagliare dall'altro pezzo, servendoci di AG per lato di appoggio, e di GD per lato d'incidenza. Diviso adunque 302 per 16 metà di AG, il quoziente $18\frac{1}{2}$, o sia 19 presso a poco, darà GX, per cui la linea AX sarebbe la divisoria per B. Ora que-

sta divisoria, poichè taglia dello straniero, ivi contenuto, il triangolo PKB, il medesimo si deve calcolare, comechè mancante alla porzione tagliata, e secondo il solito rifare l'operazione. Per calcolare il triangolo PKB, noi abbiamo due triangoli al vertice PKB, OPV, de' quali si debbono sapere le due basi parallele OV, KB per eseguire la regola della intersecazione. Per sapere KB si dica così. Tutto AG di 32 sta a tutto GX di $18\frac{1}{2}$, come AR di 24 ad RK, che si trova $14\frac{1}{2}$ circa; e poichè RB è di 6, resta la base BK di $8\frac{1}{2}$. Per sapere OV si dica. Tutto AG di 32 sta a tutto GX di $18\frac{1}{2}$, come AT di 12 a TV, che si trova 7 presso a poco; e perchè TO è di 13, resta la base OV di 6. Sapute così le due basi parallele, ed essendo la loro comune altezza TR di 14, ritroveremo l'altezza propria del triangolo straniero PKB dicendo così. La somma $14\frac{1}{2}$ delle due basi parallele sta alla loro comune altezza 14, come la sola base KB alla propria altezza, che sarà 8 circa. Quindi moltiplicando di questo triangolo straniero la base per la metà dell'altezza, il prodotto $32\frac{1}{2}$ sarà la sua quadratura, e che sarà la quantità mancante a 302, che si è tagliata, ed alla quale si deve aggiungere nel modo seguente.

Questo mancante $32\frac{1}{2}$, che si deve aggiungere, noi lo faremo a catena spezzata, dividendolo in due parti regolate a proporzione, e sieno 20, e $12\frac{1}{2}$, aggiungendo la prima ad AP, e la seconda KX. Per aggiungere 20 ad AP si farà così. Dal punto P si tiri PS, e che calcolata si trova $10\frac{1}{2}$ circa. Ritrovata questa, si faccia l'apparecchio angolare con allungare PB finchè si unisca col prolungamento di SG, il quale si trova così. S'innalzi la perpendicolare BQ di 8, la quale taglia di PS la porzione QP di $4\frac{1}{2}$. Si dica dunque. La parte PQ di $4\frac{1}{2}$ sta alla parte QB di 8, come tutto PS di $10\frac{1}{2}$ a tutto SG prolungato, che si trova $18\frac{1}{2}$. Ora il resto della base SA essendo 18, sarà tutto il lato AG prolungato $36\frac{1}{2}$, e l'altezza SP di $10\frac{1}{2}$. Quindi di tutto il gran triangolo APG prolungato, moltiplicando la base intera prolungata per la metà dell'altezza, il prodotto $192\frac{1}{2}$ sarà la sua quadratura. Ritrovato questo, si aggiunga al medesimo la prima porzione 20, ed avremo $212\frac{1}{2}$, il quale diviso per $18\frac{1}{2}$, metà di tutto AG prolungato, il quoziente $11\frac{1}{2}$ darà l'alzata FS, la parallela FC, e la linea AC sarà la prima divisoria per 20, aggiunta ad AP.

Per aggiungere poi a KX l'altra porzione $12\frac{1}{2}$ si farà co-

sì. Essendo RK di $14 \frac{1}{2}$ e GX di $18 \frac{1}{2}$, sarà KY di $10 \frac{1}{2}$, e DX di $6 \frac{1}{2}$, e l'altezza DY di 7 del capotagliato DYKX; per cui usando le regole esposte, ritroveremo $46 \frac{1}{2}$, ovvero 47 circa, la quadratura del medesimo capotagliato. E poichè dobbiamo adattare $12 \frac{1}{2}$ verso KX, così noi taglieremo alla rovescia il residuo $34 \frac{1}{2}$, servendoci di DY per lato di appoggio, e di YK per lato d'incidenza. Diviso dunque $34 \frac{1}{2}$ per $5 \frac{1}{2}$ metà di DY, il quoziente $9 \frac{1}{2}$ darà l'alzata YL, e tirata DL, la medesima sarà la seconda divisoria per la parte, che si doveva aggiungere. Si vede intanto, che la divisoria spezzata AC, LD fa il confine della parte di B di 802, e resta di questo secondo pezzo il residuo 400 che fa parte alla seguente porzione.

Per dare a C la parte 720, noi ne abbiamo 400 di residuo nel pezzo AD, per cui dobbiamo prendere il dippiù 320 nell'altro pezzo AB, servendoci di AH per lato di appoggio, e di HB per lato d'incidenza. Diviso adunque 320 per $12 \frac{1}{2}$, metà di AH, il quoziente $25 \frac{1}{2}$ darà l'alzata HF, e tirata AF, la medesima sarebbe la divisoria per C. E poichè questa divisoria taglia del corpo straniero, ivi contenuto, il pezzo VDKO, il medesimo si deve calcolare per rifare l'operazione secondo il solito. Per calcolare questo pezzo straniero, si tiri dal punto D la retta DT, e dal punto F la retta FL, ed avremo così la intersecazione de' due triangoli al vertice VDM, VFL, de' quali il triangolo VDM bisogna calcolare. Per calcolarlo, si debbono sapere le due basi parallele FL, DM. Per sapere FL si dica. Tutto DG di 13 sta a tutto GI di 14, come DF di $11 \frac{1}{2}$ ad FL, che si trova $12 \frac{1}{2}$ circa. Per sapere DM si dica. Tutto FH di $25 \frac{1}{2}$ sta ad HA di 25, come FD di $11 \frac{1}{2}$ a DM, che si trova $11 \frac{1}{2}$ presso a poco. Sapute dunque le due basi parallele FL, DM, ed essendo la loro comune altezza FD di $11 \frac{1}{2}$, calcoleremo l'altezza propria del triangolo VDM dicendo così. La somma $23 \frac{1}{2}$ delle due basi parallele sta alla loro comune altezza $11 \frac{1}{2}$, come la sola base DM di $11 \frac{1}{2}$ alla sua propria altezza, che sarà $5 \frac{1}{2}$ circa. Quindi moltiplicando la base per la metà dell'altezza, il prodotto $29 \frac{1}{2}$ sarà la quadratura del primo straniero VDM.

Fatto questo, dobbiamo calcolare l'altro pezzo DMOK, al quale se uniremo il triangolo MOT, che esce fuori, noi avremo tutto il triangolo DKT. Intanto calcoleremo prima il triangolo minore MOT, che esce fuori, e poi tutto il

triangolo DKT, affinchè sottraendo il minore dal maggiore, ci resti lo straniero solo, che noi cerchiamo.

Per calcolare dunque il triangolo minore MOT, che esce fuori, dobbiamo sapere le due basi parallele MT, KZ de' due triangoli al vertice per quest'altra intersecazione. Per sapere MT si faccia così. Dal punto K s'innalzi la perpendicolare KR, finchè s'incontri col prolungamento di LB sino ad R, e poi si dica. Il lato KR di 12 sta ad RB di 14, come KS di 8 ad ST, che sarà $9\frac{1}{2}$, e poichè SM è di $3\frac{1}{2}$, come residuo di DM, così resta MT di 6. Inoltre per sapere la base KZ si dica così. La parte RS di 4 sta ad SM di $3\frac{1}{2}$, come tutto RK di 12 a tutto KZ, che sarà 9. Sapute ora le due basi parallele, ed essendo la loro comune altezza DC di 8, ritroveremo l'altezza propria del triangolo MOT dicendo così. La somma 15 delle due basi parallele sta alla loro comune altezza 8, come la sola base MT di 6 alla propria altezza, che si trova $3\frac{1}{2}$. Quindi moltiplicando la base per la metà dell'altezza, il prodotto 10 sarà la quadratura del piccolo triangolo MOT, che esce fuori.

Trovato questo, ora dovremo ritrovare la quadratura di tutto il triangolo DKT, e che si saprà così. Tutta la base DT è di $17\frac{1}{2}$ pe' calcoli antecedenti, e questa moltiplicata per 4, metà dell'altezza SK, il prodotto $69\frac{1}{2}$ sarà la sua quadratura, dalla quale sottratto 10 pel triangolo minore MOT, il residuo $59\frac{1}{2}$ sarà la quadratura del pezzo DKOM. Unendo dunque questo pezzo $59\frac{1}{2}$ con l'altro triangolo straniero VDM di $29\frac{1}{2}$, la somma $88\frac{1}{2}$ presso a poco sarà la quadratura di tutto lo straniero VDKO, che manca alla quantità, che per C si era tagliata, e che si deve aggiungere secondo il solito a catena spezzata.

La quantità mancante $88\frac{1}{2}$ la divideremo in due porzioni, applicandone 48 sul lato AO, e poi $40\frac{1}{2}$ sul lato VF. Per applicare 48 sul lato AO si distenda per KY, ed avremo il triangolo OYA, la cui altezza OS è di $10\frac{1}{2}$, e la base AY si trova 24, calcolandola con abbassare da B la perpendicolare sopra SA, ed avremo 126 per quadratura del triangolo OYA, che può stimarsi come un apparecchio angolare. A questo apparecchio unendo la prima porzione 48, avremo la somma 174, la quale divisa per 12, metà di AY, il quoziente $14\frac{1}{2}$ darà l'alzata SN, la parallela NQ, e la linea AQ sarà la prima divisoria della prima porzione. Per adattare la seconda porzione $40\frac{1}{2}$ a fianco di FV, si faccia

così. Si calcoli il triangolo FVD con trovare la perpendicolare EV, che sarà $6\frac{1}{2}$, la base DF, che sarà $11\frac{1}{2}$, e la sua quadratura $36\frac{1}{4}$, alla quale unito $40\frac{1}{2}$, avremo $77\frac{1}{2}$ circa. Quindi diviso $77\frac{1}{2}$ per 9, metà di BD, il quoziente $8\frac{1}{2}$ darà l'alzata EX, la parallela XO, e la linea BO sarà la divisoria per la seconda porzione. Ora da tutto il pezzo AB di 581, essendosi levata la porzione di C, il residuo 261 che rimane, serve per la seguente porzione.

Per dare a D la porzione 620, noi ne abbiamo 261, come residuo, nel pezzo antecedente AB, per cui dobbiamo tagliarne il dippiù 359 dall'ultimo pezzo AC, servendoci di AF per lato di appoggio, e di FC per quello d'incidenza. Diviso adunque 359 per 16, metà di AF, il quoziente $22\frac{1}{8}$ darà l'alzata FG, e la linea AG sarebbe la divisoria per D. Ora poichè questa divisoria taglia del corpo straniero, ivi contenuto, la porzione NOHZ, la medesima si deve calcolare, come mancante alla porzione tagliata, e rifare l'operazione.

Per calcolare questo pezzo straniero, si distenda GZ sino in T, ed avremo il triangolo straniero ZHT opposto al vertice col triangolo HML, de' quali seguendo la regola della intersecazione, bisogna calcolare il triangolo straniero con trovare le basi di ambidue. Per trovare ZT si dica così. Tutto AF di 52 sta a tutto FG di $22\frac{1}{2}$ circa, come AG di 17 a GT, che sarà 12 circa; e perchè GZ è di 7, resterà ZT di 5. Per trovare la base ML si dica. Tutto AF di 52 sta a tutto FG di $22\frac{1}{2}$, come AD di 8 a DM, che sarà $\frac{4}{3}$; e perchè DL è di 22, così sarà la base ML di $16\frac{1}{3}$. Conosciute le due basi parallele, ed essendo la di loro comune altezza DG di 9, ritroveremo l'altezza propria del triangolo straniero dicendo così. La somma $21\frac{2}{3}$ delle due basi parallele sta alla loro comune altezza 9, come la sola base ZT di 5 alla propria altezza, che sarà $2\frac{1}{2}$ presso a poco. Moltiplicando dunque la base per la metà dell'altezza, il prodotto $5\frac{1}{2}$ presso a poco, sarà la quadratura del triangolo straniero ZHT.

Per calcolare il resto dello straniero TZNO, dal punto N si abbassi la perpendicolare NP, che sarà 10, e che taglia di tutto ZT di 5, la parte PZ di 4; quindi è, che moltiplicando la base PZ per la metà dell'altezza PN, il prodotto 20 sarà la quadratura dell'altro triangolo straniero NPZ, rimanendoci a calcolare il solo pezzo TPNO nel modo seguente. Il lato NP si distenda sino ad S, e si calcoli tutto

NS facendo così. Si tiri HQ, altezza di $1 \frac{1}{2}$, e si continui sino a B, ed avremo tutto HB di $17 \frac{1}{2}$, della quale si deve trovare la differenza BC dalla sua parallela CS, quale differenza per trovarla, si tiri HE, e poi si dica. Tutto AG di 17 sta a tutto GT di 12, come AE di $14 \frac{1}{2}$ ad EH, che sarà $10 \frac{1}{2}$ circa; e perchè GP è di 11, così resta la differenza PQ di $\frac{1}{2}$. Inoltre essendo ora CG di $11 \frac{1}{2}$, si dica così. Tutto GB di 12 sta a tutto BH di $17 \frac{1}{2}$, come GC di $11 \frac{1}{2}$ a CS, che sarà $16 \frac{1}{2}$; e perchè CP è di 15, resta PS di $1 \frac{1}{2}$, ed essendo PT di 1, il triangolo PST sarà di quadratura $\frac{1}{2}$, la quale si noti per sottrarla dalla quadratura del triangolo NSO, che attualmente cerchiamo.

Abbiamo il triangolo straniero NSO di cui sappiamo per ora la sola base NS di $11 \frac{1}{2}$, e questo essendo unito al vertice col triangolo GOM, abbiamo quest'altra intersecazione da risolvere, cercando l'altra base GM. Per ritrovarla si osservi, che essendo FX di 5, resta XY di 2, ed essendo GL anche 5, si cerca la porzioncina LM dicendo così. Tutto NX di 15, sta ad XY di 2, come NL di $11 \frac{1}{2}$ ad LM, che sarà $1 \frac{1}{2}$, per cui sarà tutto GM di $6 \frac{1}{2}$. Conosciute così le due basi parallele GM, NS, ed essendo la di loro comune altezza CG di $11 \frac{1}{2}$, dovremo cercare l'altezza OV dicendo così. La somma $18 \frac{1}{2}$ circa delle due basi parallele sta alla di loro comune altezza $11 \frac{1}{2}$, come la sola base NS di $11 \frac{1}{2}$ all'altezza VO, che si trova $7 \frac{1}{2}$ circa. Quindi moltiplicando la base per la metà dell'altezza, il prodotto 40 sarà la quadratura di tutto lo straniero ONS, dal quale tolto via il triangolo di PST $\frac{1}{2}$ o presso a poco 1, resta il dippiù 39 di TPNO. Ora riducendo tutti gli stranieri calcolati in una somma, avendo per NPZ la quantità 20, per ZHT la quantità $5 \frac{1}{2}$, per TPNO la quantità 39, avremo per tutto NOZH la quantità $64 \frac{1}{2}$, che esprime quel che manca alla quantità tagliata per D, e che noi l'aggiungeremo secondo il solito a catena spezzata.

La quantità mancante calcolata $64 \frac{1}{2}$ la divideremo in due porzioni, applicandone 40 ad AH, ed il resto $24 \frac{1}{2}$ ad OG. Per applicare 40 al lato AH, si calcoli prima il triangolo AHE, che sarà $78 \frac{1}{2}$; di poi HZ si distenda sino ad R, formando l'altro triangolo HER, di cui si deve calcolare la sola base ER per saperne la quadratura. Per calcolare dunque ER, supponiamo, che dal punto Z si abbassi sopra EH una perpendicolare, che sarà $2 \frac{1}{2}$, la quale taglia

★★

di tutto EH la porzione $3 \frac{1}{2}$ verso H, e la porzione 7 verso E. Ora si dica. La parte verso H di $3 \frac{1}{2}$ sta alla perpendicolare $2 \frac{1}{2}$ tirata da Z, come tutto HE di $10 \frac{1}{2}$ a tutto ER, che sarà $6 \frac{1}{2}$. Quindi moltiplicando la base per la metà dell'altezza, il prodotto $33 \frac{1}{2}$ sarà la quadratura del triangolo HER, la quale unita alla quadratura del triangolo AHE, avremo la somma $111 \frac{1}{2}$ per tutto il triangolo AHR, che costituisce l'apparecchio angolare, la cui base intera AR si trova essere $25 \frac{1}{2}$.

Eseguito così questo apparecchio, noi dobbiamo aggiungere ad AH la porzione 40, per cui unendo questa porzione all'apparecchio $111 \frac{1}{2}$, avremo la somma $151 \frac{1}{2}$, la quale divisa per $11 \frac{1}{2}$, metà del lato di appoggio AR, il quoziente 13 circa darà l'alzata EI, e tirata la parallela IK, la linea AK sarà la prima divisoria per la porzione 40. Per applicare la seconda parte $24 \frac{1}{2}$ al lato GO si faccia così. Si trovi la quadratura del triangolo GOM, e quella del capotagliato FGMY per avere tutto il pezzo GOYF. Per riguardo al triangolo GOM sappiamo la base GN di $6 \frac{1}{2}$, e la sua altezza $4 \frac{1}{2}$, come residuo di OV; per cui moltiplicando l'una per la metà dell'altra, avremo pel medesimo 15 di quadratura. Per riguardo al capotagliato, sappiamo i due lati paralleli GM, FY, che presi insieme fanno $13 \frac{1}{2}$, e sappiamo dippiù l'altezza GF di $3 \frac{1}{2}$; per cui moltiplicando la somma de' due lati paralleli per la metà dell'altezza, il prodotto $24 \frac{1}{2}$ sarà la sua quadratura. Unendo ora le due quadrature, avremo in tutto $39 \frac{1}{2}$ per tutto GFYO. Ora poichè dobbiamo adattare a GO la quantità $24 \frac{1}{2}$, la taglieremo alla rovescia, staccando il residuo 14 circa, servendoci di FY per lato di appoggio, e di YO per lato d'incidenza. Dividendo dunque 14 per $3 \frac{1}{2}$, metà di FY, il quoziente 4 darà l'alzata YZ, e la linea FZ sarà la divisoria per la seconda porzione, che si doveva adattare. Finalmente il resto del pezzo AC di $472 \frac{1}{2}$ sarà l'ultima porzione di E, come è manifesto.

7. *Data in una figura una divisoria trasversale tra due parallele, che co' suoi estremi non tocchi le medesime, sapere unire la trasversale colle parallele, con tirare lo straniero da ambe le parti, e poi calcolarli.* Sia
Fig. 136 il parallelogrammo rettangolo ABDC, nel quale vi sia tirata una divisoria trasversale GH, la quale co' suoi estremi G, ed H non tocchi gli estremi delle due parallele AB,

CD, dalle quali in H è distante HB di 4, ed in G è distante GC di 5. Si cerca ora di unire gli estremi della trasversale cogli estremi delle due parallele. Per eseguire questo problema, la divisoria trasversale GH si allunghi in diretto da ambidue i suoi estremi per HF, e per GE, finchè si unisca negli estremi F, ed E del prolungamento in diretto delle due parallele per BF, e per CE, ed avremo in questo modo i due triangoli stranieri FBH, EGC, de' quali ci sono note solamente le altezze, essendo BH di 4, e GC di 5. Si cerca ora di calcolare la base BF, e la base CE per conoscerne le quadrature.

Per sapere BF si faccia così. Dal punto H si tiri HI uguale; e parallela a BA, e poi si dica. La parte GI di 9 sta ad HI di 24, come tutto GA di 15 a tutto AF, che sarà $3\frac{3}{4}$; e perchè AB è di 24, resterà la base straniera BF di 10. Moltiplicando dunque questa base per la metà dell'altezza, il prodotto $21\frac{1}{2}$ sarà la quadratura del primo straniero FBH. Inoltre per sapere CE, si faccia così. Dal punto G si tiri GK uguale, e parallela a CD, e poi si dica. La parte HK di 9 sta a KG di 24, come tutto HD di 14 a tutto DE, che si trova $3\frac{1}{2}$; e perchè DG è di 24, resterà la base straniera CE di 13. Quindi moltiplicando questa base per la metà dell'altezza, il prodotto $32\frac{1}{2}$ sarà la quadratura del secondo straniero EGC, e sarà così eseguito il problema. Avvertasi intanto, che se gli estremi H, e G della trasversale fossero uniti cogli estremi B, e C delle due parallele, allora il calcolo esposto non bisogna; ma se poi la trasversale con un solo estremo fosse unita ad una delle parallele, e col l'altro disunito, in questo caso si farebbe l'unione, ed il calcolo per quella sola parte, dove si tira lo straniero. Questo problema si chiama *Regola della Zeta*, giacchè colla esecuzione del medesimo si forma questa lettera, come manifestamente si vede in AFED.

8. *Data una figura distinta in più corpi, e divisa con una trasversale, saper calcolare le porzioni intersecate di ciaschedun corpo.* Sia il Trapezio BCDEFG distinto in Fig. 136. cinque corpi CBG, CQ, KR, LF, FDE, i quali uniti insieme rappresentano, e compongono tutto il dato trapezio, il quale venga diviso con una trasversale AS in due porzioni comunque, la quale interseca tutti cinque i corpi. Si cerca di saper calcolare quale quantità venga tagliata di ciascheduno de' cinque corpi a destra, ed a sinistra della trasversale.

Per eseguire tutto questo, egli fa di mestieri di eseguire tre differenti operazioni. Consiste la prima nel trovare la quadratura distinta di tutti cinque i corpi, per avere la intera quadratura del trapezio. La seconda richiede, che da qualunque punto A si divida il trapezio colla trasversale AS, secondo quella proporzione, che si voglia. La terza finalmente eseguisce la regola della intersecazione per ognuno de' cinque corpi, per conoscere la quantità tagliata di ciascheduno de' medesimi a destra, ed a sinistra della divisoria trasversale.

Per riguardo alla prima operazione, colla quale si deve calcolare la distinta quadratura di ciascheduno de' cinque corpi, sarà bene lo avvertire, che siccome per conoscere la quadratura si deve usare la riduzione, così questa istessa si faccia sempre interna per evitare un maggior fastidio nel calcolo: Quindi essendo A il punto divisorio, si tirino le linee de' quadranti HI, AE, che s'intersechino in A ad angoli retti. Di poi dall'estremo H sino all'angolo D si tiri la linea di riduzione HD, e dall'estremo I l'altra linea IO, e che amendue queste linee di riduzione sieno parallele ad AE, e perciò parallele tra di loro. Finalmente da tutti gli estremi de' cinque corpi si abbassino le perpendicolari sopra le due parallele di riduzione, ed avremo CR, KE, LI, e dall'altra parte QB, RD, FK; e si misurino tutte queste perpendicolari, e tutti gl'intervalli segnati sopra delle linee della riduzione: Fatto questo, sarà facile di calcolare la quadratura distinta di ogni corpo, ed avremo così CBG di 345 $\frac{1}{2}$, CQ di 611, KR di 672 $\frac{1}{2}$, LF di 806 $\frac{1}{2}$, e DEF di 285; onde sommando insieme queste distinte quadrature, il numero 2720 $\frac{1}{2}$ sarà la quadratura totale di tutto il trapezio dato, e distinto in cinque corpi.

Per riguardo alla seconda operazione, che dal punto A questo quantitativo si deve dividere con una trasversale in due porzioni, delle quali A abbia 1400, e B abbia il resto 1320 $\frac{1}{2}$, si faccia così. Il triangolo GFO è di 180, il capotagliato AGOE è di 520, e che uniti insieme fanno 700, per cui gli altri 700 per A li dobbiamo prendere sopra AE, servendoci di questa per lato di appoggio, e di ED per lato d'incidenza. Diviso adunque 700 per 20 $\frac{1}{2}$, metà di AE, il quoziente 23 $\frac{1}{2}$ darà l'alzata ES, e perciò SA sarà la divisoria trasversale, che divide la porzione di A dalla porzione di B.

Per riguardo alla terza operazione finalmente, poichè la trasversale AS interseca tutti cinque i corpi, così si deve calcolare di ognuno quella porzione, che resta nella parte di A, e quanta ne resti nella parte di B. Per eseguirlo, si osservi, che la trasversale AS co' suoi estremi non si unisce cogli estremi delle due parallele di riduzione, per cui bisogna farli unire col prolungamento delle medesime, e della trasversale ne' punti dell'unione M, e T, mediante la quale nascono due stranieri MDS, TGA, che bisogna calcolarli, e faremo uso così della regola della zeta.

Per calcolare il primo straniero MDS, si dovrà sapere la lunghezza DM, facendo così. Poichè DS è di $6\frac{1}{4}$, come residuo di tutto DE, così dal punto S si concepisca tirata una linea verso P, ed indi si dica. Come AP di $23\frac{1}{4}$ sta a PS di 59, così tutto AH di 30 a tutto HM, che sarà $74\frac{1}{4}$, presso a poco, dalla quale tolto via HD di 59, resta DM di $15\frac{1}{4}$. Ora moltiplicando la base DM per la metà dell'altezza DS, il prodotto 48 circa darà la quadratura del primo straniero DSM. Inoltre per trovare la base GT dell'altro straniero AGT si dica così. Come SE di $23\frac{1}{4}$ sta ad EA di 59, così tutto SN di $33\frac{1}{4}$ a tutto NT, che si trova 84 circa; e perchè IN è di 59, resta IT di 25, e tutta la base TG di 28; per cui moltiplicando questa base per la metà dell'altezza AI, il prodotto 140 sarà la quadratura del secondo straniero AGT.

Eseguito tutto questo preparativo, si vuol sapere di tutto il primo corpo CBG quanta sia la parte intersecata AVG, che rimane nella porzione di A. Per saperla, noi abbiamo i due triangoli opposti al vertice TVG, QVM de' quali le due basi parallele sono note, e la di loro comune altezza HI anche è nota. Quindi risolveremo la prima intersecazione, dicendo così. La somma $90\frac{1}{2}$ delle due basi parallele QM, TG sta alla loro comune altezza HI di 40, come la sola TG di 28 alla sua propria altezza, che si trova $12\frac{1}{2}$ circa. Quindi moltiplicando la base TG per la metà dell'altezza ritrovata, il prodotto 175 sarà la quadratura del triangolo TVG, dal quale tolto via lo straniero TAG di 140, il residuo 35 sarà la porzione AVG; e poichè tutto il corpo CBG è di $345\frac{1}{2}$, così sottraendo 35, che cade nella parte di A, il resto 310 $\frac{1}{2}$ sarà il dippiù, che resta nella parte di B.

Per sapere il quantitativo GVXQ del secondo corpo, si faccia così. S' includa con questo tutto l'antecedente triangolo VTG, ed avremo due triangoli al vertice TXC, SXM;

de' quali le due basi parallele TC, SM sono note, e nota ancora la loro comune altezza HI. Si dica dunque. La somma $87 \frac{1}{2}$ delle due basi parallele sta alla loro comune altezza 40, come la sola base TC di 39 alla sua propria altezza, che si trova 18 presso a poco. Quindi moltiplicando la base TC per la metà 9 dell' altezza, il prodotto 351 sarà la quadratura del triangolo TXC, dal quale tolto via TVG ci resta 176 per VG CX, ed aggiungendo a questo ultimo il triangoletto GQC di 11, la somma 187 sarà la porzione GVXQ. Ora essendo tutto il corpo CQ di 611, così tolto via 187, che cade nella parte di A, il resto 424 sarà quello, che rimane nella porzione di B.

Per sapere il quantitativo QXYR del terzo corpo, si faccia così. S' includa a questo l' antecedente triangolo TXC, ed avremo due triangoli al vertice TYH, BYM, de' quali le due basi parallele TH, BM sono note, e nota altresì la loro comune altezza HI. Si dica adunque la somma $87 \frac{1}{2}$ delle due basi parallele sta alla loro comune altezza 40, come la sola base TH di 53 alla propria altezza, che sarà $24 \frac{1}{2}$ presso a poco. Quindi moltiplicando la base TD per la metà dell' altezza, il prodotto $642 \frac{1}{2}$ sarà la quadratura del triangolo TYH, dal quale tolto via il triangolo TXC di 351, il resto $291 \frac{1}{2}$ sarà il pezzo XGHY, ed al quale aggiunto il pezzo CQRH di $49 \frac{1}{2}$, la somma $341 \frac{1}{2}$ sarà la porzione che resta nella parte di A, ed essendo tutto il corpo KR di $672 \frac{1}{2}$, il resto $331 \frac{1}{2}$ sarà poi quello, che rimane nella porzione di B.

Per sapere il quantitativo YRFZ dal quarto corpo, si faccia così. S' includa a questo l' antecedente triangolo TYH, ed avremo due triangoli al vertice TZL, DZM, de' quali le due basi parallele TL, DM sono note, e l' altezza comune HI anche nota. Si dica dunque. La somma $83 \frac{1}{2}$ delle due basi parallele sta alla loro comune altezza 40, come la sola base TL di 68 alla propria altezza, che sarà $32 \frac{1}{2}$ circa. Quindi moltiplicando la base TL per la metà dell' altezza, il prodotto 1105 sarà la quadratura del triangolo TZL, dal quale tolto via il triangolo TYH di $642 \frac{1}{2}$, il residuo $462 \frac{1}{2}$ sarà il pezzo YHLZ, ed al quale aggiunto HRFL di 98, la somma $560 \frac{1}{2}$ sarà la porzione, che rimane nella parte di A, e perchè tutto il corpo LF è di $806 \frac{1}{2}$, il residuo $246 \frac{1}{2}$ sarà il dippiù che resta nella parte di B.

Finalmente per sapere il quantitativo ZSEF del quinto corpo intersecato, essendo questa porzione molto più gran-

de del suo residuo DZS, così noi questo residuo calcoleremo. Essendo l'altezza del triangolo DZM solamente $7 \frac{1}{2}$ come residuo dell'altezza del suo triangolo al vertice TZL, ed essendo la base DM di $15 \frac{1}{2}$, così moltiplicando questa base per la metà dell'altezza, il prodotto $58 \frac{1}{4}$ sarà la quadratura del triangolo DZM, dal quale tolto via lo straniero DSM di 48, resterà il triangolo DZS di $10 \frac{1}{4}$, che resta nella parte di B, ed essendo tutto DEF di 285, il dippiù $274 \frac{1}{4}$ sarà quello, che rimane nella parte di A, come è chiaro a capirsi.

La esecuzione dell'esposto problema si dice *regola degli affitti*, per la ragione, che alle volte accade, che più corpi di padroni diversi, uniti e componenti un solo territorio, si dia poi ad affitto a due persone, le quali si dividono il territorio in due porzioni comunque, ed allora bisognerà, che ciaschedun padrone de' corpi particolari sappia quanto debba riscuotere a proporzione dall'una e dall'altra persona, che si hanno affittato il territorio, e se lo hanno diviso.

Queste sono tutte le regole, e tutte le pratiche; che col fatto abbiamo veduto essere sufficientissime pe' novelli Agrimensori, e che gli hanno istrniti in modo da potere eseguire qualunque problema spettante alla configurazione, alla quadratura, ed alla divisione de' territorii. Se all'acquisto di sì fatte cognizioni si unisca la indispensabile assuefazione alla campagna, allora saremo sicurissimi, che le nostre fatiche non debbano riuscire inutili a tutti coloro, che fideranno i propri interessi alla nostra intelligenza, ed esattezza. Intanto per compimento di ogni cosa confessiamo sinceramente, che la mediocrità delle nostre conoscenze, e de' nostri lumi ci forza di presto dar termine al presente lavoro.

FINE.

SNV 610907

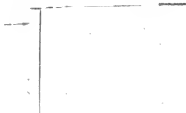


INDICE



PREFAZIONE	pag.	3
CAPO I. I principii		9
§. I. <i>Introduzione</i>		ivi
§. II. <i>Le definizioni</i>		10
CAPO II. Il disegno		17
§. I. <i>Gli strumenti piani</i>		ivi
§. II. <i>Li problemi</i>		19
CAPO III. Le misure		22
§. I. <i>La misura lunga</i>		ivi
§. II. <i>La misura quadrata</i>		23
§. III. <i>La misura nuova</i>		25
CAPO IV. Gli strumenti		35
§. I. <i>Il compasso</i>		ivi
§. II. <i>Lo squadro</i>		ivi
§. III. <i>La bussola</i>		37
CAPO V. La longimetria		43
§. I. <i>Le linee calcolabili</i>		ivi
§. II. <i>Le linee misurabili</i>		46
CAPO VI. La planimetria		58
§. I. <i>La quadratura</i>		ivi
§. II. <i>La configurazione</i>		75
§. III. <i>La legazione</i>		83
CAPO VII. La divisione		86
§. I. <i>La divisione ordinaria</i>		ivi
§. II. <i>La divisione straordinaria</i>		152
§. III. <i>La intersecazione</i>		165





;

1

.

.

.

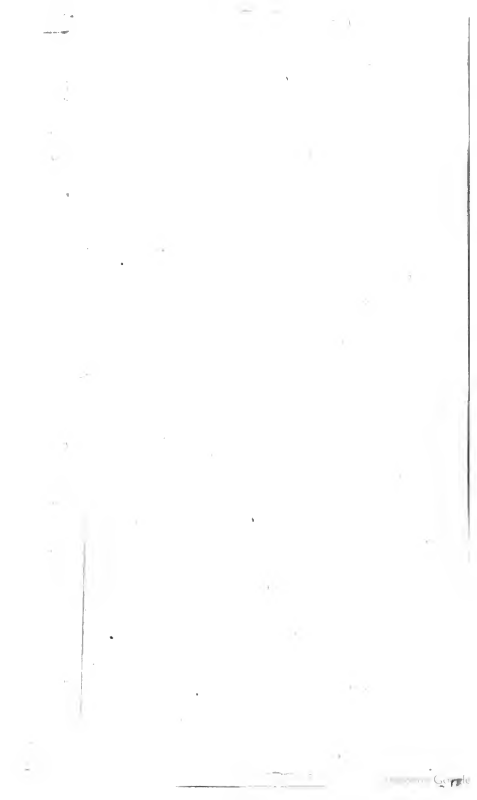


Fig. 62.

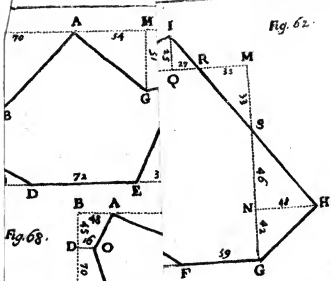
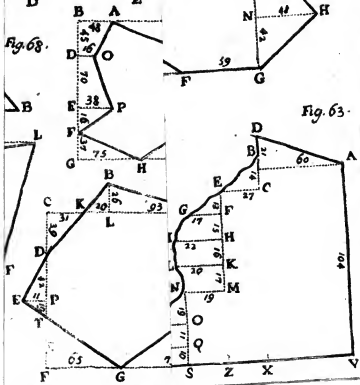


Fig. 63.





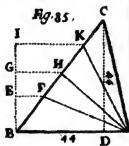
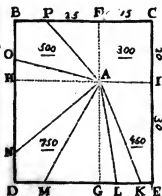
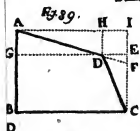
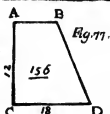
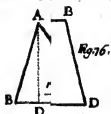
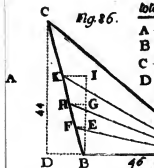
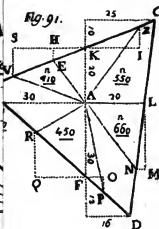
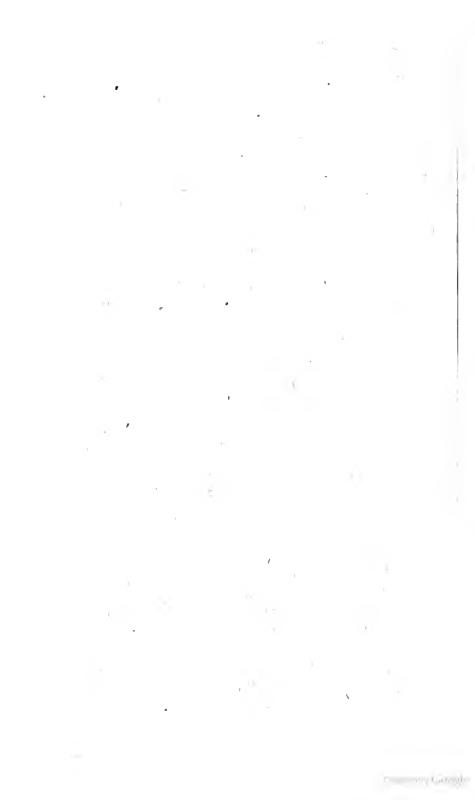


Fig. 91.





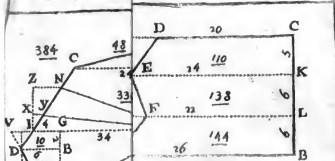


Fig. 98.

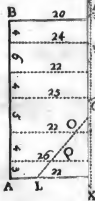
totale-1201.

- A-147
- B-132
- C-184
- D-153
- E-192
- F-180
- G-103
- H-110

Fig. 95.



Fig. 97.



308

Fig. 99.



GENERAL

7

6

5

4

3

2

1

0

9

8

7

6





B

P

3

21



